

Cos'è la diffusione anomala (e perché è così consueta)

Serena Dipierro, Enrico Valdinoci*

SUNTO – In questa nota esploreremo il concetto di diffusione e vedremo come la sua interpretazione sia cambiata nel tempo. Scopriremo perché la diffusione è un'idea così utile e universale, che funziona sempre... tranne quando non funziona! In quei casi, ci viene in aiuto la “diffusione anomala”, che offre una chiave di lettura diversa e complementare.

PAROLE CHIAVE – Diffusione; Equazione del calore; Laplaciano frazionario.

ABSTRACT – In this note, we will explore the concept of diffusion and see how its interpretation has changed over time. We will discover why diffusion is such a useful and universal idea, one that always works... except when it doesn't! In those cases, “anomalous diffusion” comes to the rescue, offering a different and complementary perspective.

KEYWORDS – Diffusion; Heat equation; Fractional Laplacian.

PARTE PRIMA – DIFFUSIONE

1. IPSE DIXIT

Secondo Aristotele, tutti gli enti terrestri si muovono verso il “luogo naturale” di appartenenza: la pietra affonda nell’acqua, ma una bolla d’aria sale verso l’alto.

Dispiace dirlo, però Aristotele, qualche volta, aveva torto. Se versiamo pò di latte nel caffè, le particelle tendono ad andare da una zona ad alta concentrazione verso una zona a bassa concentrazione e non sembrano avere nessun luogo naturale da raggiungere (cfr. Fig. 1).

*University of Western Australia, Department of Mathematics and Statistics, 35 Stirling Highway, WA6009 Crawley, Australia. E-mail: serena.dipierro@uwa.edu.au, enrico.valdinoci@uwa.edu.au. Relazione tenuta il 20 giugno 2024.

A parziale discolpa di Aristotele, qualcuno ci ha fatto notare che ai suoi tempi il caffè non esisteva, ma insomma questo fenomeno di “diffusione” in cui il trasporto di materia è determinato da una differenza di concentrazione, e non dalla presunta esistenza di un luogo naturale cui le particelle dovrebbero tendere, poteva essere osservato in altri fenomeni comuni all’epoca, tra cui ad esempio quello di mescolare acqua e vino in un cratere, come era d’uso nei banchetti (il consumo di vino puro era considerato un atteggiamento proprio dei barbari, consentito solo alle divinità; e comunque senza le moderne metodologie di conservazione era possibile al tempo che il vino diventasse di frequente aceto).

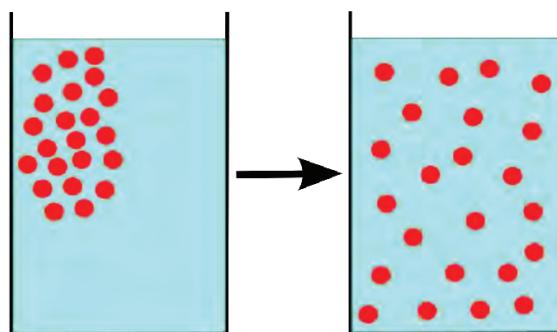


Fig. 1 – Diffusione in un liquido. Immagine di JrPol, Wikipedia, Creative Commons Attribution 3.0 Unported license.

2. DAI DIAMANTI NON NASCE NIENTE...

...dagli errori (in buona fede) nasce, a volte, una teoria scientifica unificante. Questo è il caso della teoria della diffusione, fondata sull’osservazione che la tendenza a “diffondersi” da regioni “congestionate” verso regioni “libere” è comune ai fenomeni più disparati, come l’ossigeno e l’anidride carbonica nei capillari attorno gli alveoli, un prodotto sul mercato, un’idea in una comunità, l’energia di un sistema fisico, il calore di un corpo, gli animali nell’ambiente naturale, eccetera.

Per cui il concetto di diffusione, con le sue tante sfaccettature, è ormai un pilastro portante in matematica, statistica, fisica, biologia, finanza, scienze sociali, ecc., e, in un certo senso, può essere visto come un tassello di un’autentica “teoria del tutto” che cerchi di spiegare fenomeni diversi alla luce dello stesso modello fondamentale.

3. MA COME RENDERE IL CONCETTO DI DIFFUSIONE QUANTITATIVO?

Questa è una domanda basilare, perché con la sola analisi qualitativa potremmo solo dire che le cose “si mischiano”, invece vogliamo capire come/quanto, poter fare predizioni, usare la diffusione per comprendere la realtà circostante, ecc.

3.1. *Approccio numero 1: teoria di media*

Per modellizzare quantitativamente la diffusione, possiamo assumere che la concentrazione $u(x, t)$ di particelle (in un punto x dello spazio, ad un istante di tempo t) vari in ragione delle concentrazioni nelle vicinanze. Ad esempio, possiamo pensare che la concentrazione ad un istante di tempo successivo, diciamo $t + \tau$, corrisponda alla concentrazione al tempo t aumentata di una quantità proporzionale (secondo una costante positiva c_0) al “surplus” di particelle contenuto in una piccola regione attorno al punto x .

In matematica, se $B_\rho(x)$ denota la palla di raggio ρ centrata in x , questa descrizione corrisponde all’equazione

$$u(x, t + \tau) = u(x, t) + c_0 \int_{B_\rho(x)} (u(y, t) - u(x, t)) dy. \quad (1)$$

I parametri τ e ρ in un’equazione di questo tipo sono pensati come incrementi “infinitesimali”, nel tempo e nello spazio rispettivamente. Al fine di rendere questa equazione “sensata” bisogna scegliere questi parametri opportunamente: per esempio, la scelta $\tau = \rho^{d+2}$ conduce alla relazione

$$\partial_t u = c \Delta u, \quad (2)$$

chiamata equazione del calore.¹ Qui sopra, il simbolo ∂_t denota la derivata rispetto al tempo e Δ è l’operatore di Laplace, ovvero la somma delle derivate parziali seconde pure rispetto alle coordinate spaziali:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}.$$

¹In questa notazione, d denota il numero di dimensioni ($d = 3$ nello spazio usuale, ma l’approccio proposto varrebbe in qualsiasi dimensione). L’Appendice A fornisce ulteriori dettagli su come ottenere l’equazione del calore (2) dal modello proposto in (1). La costante c che compare nella (2) è proporzionale alla costante c_0 della (1) ed è chiamata coefficiente di diffusione.

3.2. Approccio numero 2: teoria statistica

Oltre ad aver esplorato l'Australia (all'epoca Nuova Olanda, catalogando oltre 4000 nuove specie vegetali) e aver individuato il nucleo cellulare, Robert Brown è famoso per la scoperta del moto browniano, avendo osservato al microscopio granuli di polline in acqua muoversi in modo continuo e frenetico. Brown non diede una spiegazione precisa per questo fenomeno (che in effetti era stato precedentemente notato anche dal botanico Jan Ingenhousz). Il chimico Leon Gouy ipotizzò per primo che il moto browniano fosse causato dall'agitazione termica degli atomi, ma, come vedremo, per una spiegazione fisica esaustiva ci sarà bisogno del genio di Albert Einstein nel suo momento di forma migliore.

Per comprendere il legame tra il moto browniano e il concetto di diffusione, possiamo considerare la densità di probabilità $u(x, t)$ di trovare una particella nel punto x all'istante di tempo t . Seguendo un moto browniano, una particella seleziona una direzione casuale e si sposta, in un'unità di tempo τ , di un passo lungo h in quella direzione, e poi ripete la stessa procedura per le successive unità di tempo.

In matematica, questo corrisponde a dire che la densità di probabilità $u(x, t + \tau)$ di trovare una particella nel punto x all'istante di tempo $t + \tau$ concide con la sovrapposizione delle probabilità $u(x + h\omega, t)$ di trovare la particella al tempo t nel punto $x + h\omega$, per una qualche direzione ω , moltiplicate per la probabilità di saltare dal punto $x + h\omega$ al punto x nell'unità di tempo (e questa probabilità è la stessa per tutte le possibili direzioni).

Ovvero,

$$u(x, t + \tau) = \int_{\partial B_1} u(x + h\omega, t) d\omega, \quad (3)$$

dove ∂B_1 denota la superficie sferica (cioè l'insieme di tutte le possibili direzioni, che di fatto possono essere rappresentate come vettori di lunghezza unitaria) e la notazione $\int_{\partial B_1}$ è la media su questa superficie sferica (cioè l'integrale su questa superficie, diviso l'area della superficie stessa, che corrisponde alla probabilità di salto).

Sottraendo $u(x, t)$ ad ambo i membri della (3) e dividendo per $\tau = c_0 h^2 \rightarrow 0$, si ottiene di nuovo l'equazione del calore (2).² Questo è interessante in quanto rivela che la diffusione (in quanto trasporto di massa dovuto a differenze di concentrazione) ha anche un fondamento statistico e la combinazione di queste due interpretazioni portò a uno dei più grandi successi della teoria della diffusione, cioè al calcolo del Numero di Avogadro.

²L'Appendice B contiene ulteriori dettagli su come ottenere l'equazione del calore da (3).

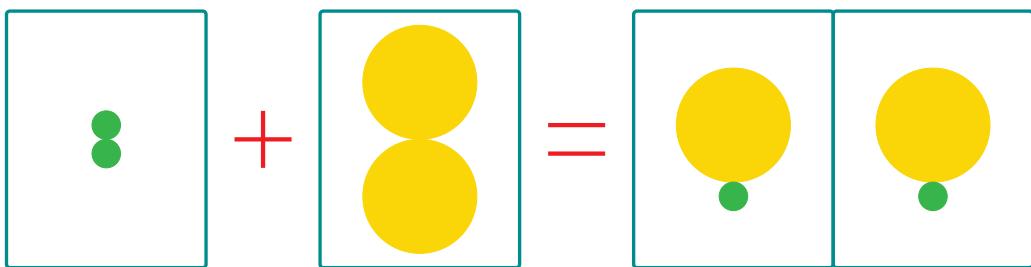


Fig. 2 – Formare l'acido cloridrico, rispettando la Legge di Avogadro. Immagine prodotta dagli autori.

4. COME SI SUOL DIRE, *DURA LEX, SED LEX*

Secondo la Legge di Avogadro, il volume di un gas ideale ad una data pressione e temperatura è proporzionale al numero di particelle (atomi o molecole), indipendentemente dal gas.

La Legge di Avogadro è molto sorprendente, almeno per due motivi. Il primo motivo ha a che fare con la sua interpretazione della struttura della materia, il secondo con la sua impressionante “universalità”. Per capire l'impatto sulla struttura della materia, vale la pena ricordare un esperimento che aveva effettuato Gay-Lussac, il quale, facendo reagire idrogeno H e cloro Cl, ottenne cloruro di idrogeno HCl. E fin qui nulla di strano, chiunque crederebbe che con un po' di H e Cl si possa fare un po' di HCl. La cosa strana, però, era che, all'epoca, ci si aspettava che un certo numero di atomi di idrogeno, contenuti in un dato volume, interagissero con un certo numero di atomi di cloro, contenuti in un volume equivalente, producendo lo stesso volume di cloruro di idrogeno, invece quel che si otteneva era un volume doppio di cloruro di idrogeno.

Allo stesso modo, con due litri di idrogeno e un litro di ossigeno si ottengono due litri di vapore acqueo (non un litro, non tre litri).

La legge di Avogadro spiega questi fenomeni: mostra che i volumi di gas non possono essere semplicemente pensati come scatolette o cubetti, e suggerisce che alcuni gas siano costituiti non da atomi singoli, ma da molecole (biatomiche nel caso dell'idrogeno H₂, del cloro Cl₂, dell'ossigeno O₂, ecc.). Per ogni coppia di molecole H₂ e Cl₂ si formano due molecole di HCl (si veda Fig. 2), e per due molecole di H₂ e una di O₂ si formano due molecole di H₂O (si veda Fig. 3).

La seconda proprietà sorprendente della Legge di Avogadro riguarda il suo carattere universale: la legge è valida per tutti i gas (ideali), indipendentemente dal tipo di gas e dalla grandezza o peso delle sue molecole.

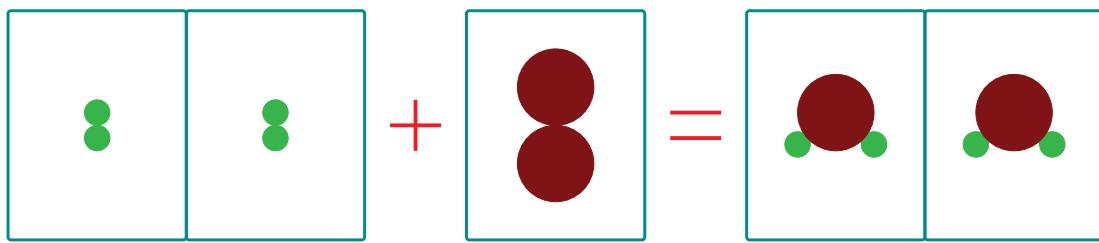


Fig. 3 – Formare l'acqua, rispettando la Legge di Avogadro. Immagine prodotta dagli autori.

In un certo senso, tuttavia, la profondità della Legge di Avogadro delinea il confine della sua capacità: la Legge di Avogadro stabilisce una relazione di proporzionalità universale, dicendoci che il numero di particelle di un gas è *proporzionale* al suo volume, ma non ci dice *quante particelle* di gas ci sono in un dato volume. La Legge di Avogadro ci dice che la quantità di sostanza (ad esempio, misurata in “mole”) è proporzionale al volume, ma non ci dice quante molecole corrispondono a questa quantità di sostanza.

Per sapere questa informazione, dovremmo conoscere il numero di molecole contenute in una mole, che è chiamato Numero di Avogadro (qui denotato come N_A), ma questa sembra un'impresa titanica, perché ci aspettiamo sia un numero grandissimo, e mica possiamo perdere tempo a contare molecole una ad una...

5. UNA GRANDE MENTE

Una vecchia pubblicità sosteneva che «per dipingere una parete grande, non ci vuole un pennello grande, ma un grande pennello». Per cui, per contare un numero grande di particelle, ci vuole una grande mente, quella di Albert Einstein.

Einstein si era iscritto all'ETH di Zurigo nel 1896 (l'anno prima era stato bocciato all'esame di ammissione per un'insufficienza nel test di francese) e laureato nel 1900, classificandosi quarto su cinque promossi. A differenza degli altri laureati, non ottenne un posto come assistente universitario e accettò un lavoro all'ufficio brevetti di Berna. In questo frangente, nell'*annus mirabilis* 1905 Einstein scrive quattro lavori che cambieranno la storia della scienza, uno sull'effetto fotoelettrico (che lo condurrà al Premio Nobel nel 1921), uno sulla relatività ristretta e uno sull'equivalenza di massa ed energia, contenente la famosa formula $E = mc^2$.

Questi sono tre. E il quarto? Il quarto forse è il meno famoso, e ha anche un titolo non proprio “accattivante” (Einstein, 1905), ma questo è quello che fa al caso nostro, perché in questo lavoro Einstein fornì una spiegazione fisica esauriente del moto browniano, legandolo all’agitazione termica delle molecole d’acqua che urtano i granelli in sospensione, e calcolò il Numero di Avogadro.

O meglio, non calcolò il suo valore numerico, su quello torneremo in seguito, dimostrò invece una formula matematica che permetteva di calcolarlo a partire da quantità macroscopiche esplicitamente verificabili, dando così anche una fondazione definitiva della teoria della diffusione.

La formula di Einstein è

$$N_A = \frac{RTt}{3\pi\mu a X^2(t)}, \quad (4)$$

dove a è il raggio delle particelle, μ la viscosità del fluido, R la costante dei gas, T la temperatura e $X^2(t)$ la distanza quadratica media delle particelle al tempo t .

L’idea di Einstein per ottenere (4) è profonda ed elegante, ma in fondo abbastanza semplice (e quindi davvero geniale), tanto semplice da poter essere raccontata (forse un po’ maldestramente) in queste poche pagine. Si tratta di usare due ingredienti per scrivere una quantità in due modi diversi, uguagliare e semplificare (i vecchi trucchi dell’algebra tornano utili a volte, ma serve un guizzo). I due ingredienti usati sono il concetto di attrito viscoso su una pallina in movimento in un fluido (che era stato quantificato da George Gabriel Stokes, baronetto per meriti scientifici, corrispondente a una forza $F = 6\pi\mu av$, dove v rappresenta la velocità del fluido) e la forza di pressione osmotica (determinata da Jacobus Henricus van ’t Hoff Jr., primo Premio Nobel in Chimica, che può essere vista come una riformulazione della Legge dei gas perfetti $pV = nRT$, dove p è la pressione, V è il volume, e n il numero di moli).

In questo modo, denotando con u la densità delle particelle in moto attraverso il fluido, da una parte si osserva che

$$F = \frac{\partial_x p}{u} \quad \begin{aligned} &\text{perché la forza su una particella corrisponde} \\ &\text{alla variazione di pressione per unità di massa} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{u} \partial_x \frac{nRT}{V} \quad \begin{aligned} &\text{avendo usato la legge di pressione osmotica} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{u} \partial_x \frac{NRT}{NAV}$$

perché, per definizione di Numero di Avogadro, il numero di particelle N è uguale al numero di moli n per il Numero di Avogadro N_A

$$= \frac{1}{u} \partial_x \frac{uRT}{N_A}$$

perché, per definizione, la densità u di particelle, è il numero di particelle N diviso il volume occupato V

$$= \frac{RT}{N_A} \frac{\partial_x u}{u}$$

perché R e N_A sono costanti e la temperatura T è mantenuta costante durante il processo. (5)

D'altra parte, il flusso ϕ di particelle attraverso una sezione S del condotto è dato dal numero di particelle dN che passano nell'unità di tempo dt . Considerando un volume infinitesimale del condotto $dV = S dx$, possiamo scrivere questo flusso come

$$\phi = \frac{dN}{dt} = \frac{u dV}{dt} = \frac{u S dx}{dt} = u S v. \quad (6)$$

Il flusso ϕ di particelle tuttavia è anche la variazione del numero totale di particelle situate nel condotto prima della sezione considerata, che pensiamo situata lungo la coordinata x . Il numero totale di queste particelle prima di x corrisponde al totale della densità di particelle per il volume del condotto prima di x , ovvero (considerando un modello di tubo orizzontale “infinitamente lungo”)

$$S \int_{-\infty}^x u$$

e il corrispondente flusso è quindi

$$\phi = \partial_t \left(S \int_{-\infty}^x u \right) = S \int_{-\infty}^x \partial_t u = c S \int_{-\infty}^x \partial_{xx} u, \quad (7)$$

dove abbiamo usato l'equazione di diffusione (2) per descrivere il moto browniano delle particelle nel fluido.

Confrontando (6) e (7) vediamo che

$$uv = \frac{\phi}{S} = c \int_{-\infty}^x \partial_{xx} u. \quad (8)$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
 F &= 6\pi\mu a v && \text{per la Legge di Stokes} \\
 &= \frac{6\pi\mu a u v}{u} && \text{avendo moltiplicato e diviso per } u \\
 &= \frac{6\pi\mu a c}{u} \int_{-\infty}^x \partial_{xx} u && \text{avendo usato la (8)} \\
 &= \frac{6\pi\mu a c}{u} \partial_x u && \text{perché un integrale "cancella" una derivata.}
 \end{aligned}$$

Confrontando questa relazione con la (5), abbiamo che

$$\frac{RT}{N_A} \frac{\partial_x u}{u} = F = \frac{6\pi\mu a c}{u} \partial_x u$$

e quindi, risolvendo in N_A e semplificando,

$$N_A = \frac{RT}{6\pi\mu a c}. \quad (9)$$

Questa è (quasi) la formula desiderata! La buona notizia è che abbiamo trovato in questo modo una relazione esplicita per il Numero di Avogadro. La cattiva notizia è che questa formula coinvolge ancora una quantità "ignota" e forse non direttamente misurabile, cioè il coefficiente di diffusione c . Ma poco male, possiamo ricavare questo coefficiente misurando la distanza percorsa, in media, da una particella. Infatti, si può controllare che una soluzione dell'equazione di diffusione (2) (in una variabile x , corrispondente all'elongazione nel tubo) è data dalla Gaussiana³

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4ct}\right). \quad (10)$$

³Torneremo sulla Gaussiana nella Sezione 7. A livello notazionale, per gli amanti della teoria della probabilità, è utile osservare che la Gaussiana (a media nulla) in termini probabilistici è a volte scritta come

$$\mathcal{N}_\sigma(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right),$$

dove la quantità $\sigma > 0$ è chiamata "varianza" e descrive lo scarto quadratico dalla media aritmetica, in quanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mathcal{N}_\sigma(x) dx = \sigma^2.$$

Si noti l'analogia con (11).

Questa soluzione descrive, in media, la densità di probabilità di una particella soggetta a moto browniano che comincia la sua traiettoria casuale nell'origine delle coordinate. La distanza quadratica media delle particelle al tempo t è quindi data dalla quantità

$$\begin{aligned}
 X^2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 G(x, t) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{4\pi ct}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4ct}\right) dx \\
 &= \frac{4ct}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \exp(-|y|^2) dy \\
 &= 2ct.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Inserendo questa relazione in (9) si ottiene (4).

6. COME VINCERE IL NOBEL

La grandezza della relazione in (4) è che riduce il calcolo del Numero di Avogadro alla misurazione di quantità macroscopiche. Questa misurazione, soprattutto all'inizio del Ventesimo secolo, era comunque abbastanza delicata, richiedendo la preparazione accurata di sferette identiche e di raggio noto. La prima verifica della relazione di Einstein arrivò nel 1908 e venne effettuata da Jean Baptiste Perrin, che per questo fu insignito⁴ nel 1926 del Premio Nobel. Per una presentazione dettagliata dell'esperimento di Perrin e del suo legame con la teoria fondata da Einstein si veda Newburgh *et al.* (2006) e Cossetto (2012).

⁴Nel discorso di premiazione, disponibile su <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1926/ceremony-speech/>, consultato il 18 settembre 2025, si riconosce il contributo di Einstein al lavoro di Perrin: «The object of the researches of Professor Jean Perrin which have gained for him the Nobel Prize in Physics for 1926 was to put a definite end to the long struggle regarding the real existence of molecules. [...] His measurements on the Brownian movement showed that Einstein's theory was in perfect agreement with reality. Through these measurements a new determination of Avogadro's number was obtained».

PARTE SECONDA – DIFFUSIONE ANOMALA

7. UN CAMBIAMENTO DI PARADIGMA?

Il Numero di Avogadro ha 24 cifre. E azzeccare un numero di 24 cifre non succede mica per caso. Per cui, all'inizio del Novecento, possiamo pensare che la diffusione sia diventata un “paradigma” consolidato. Una delle cose belle della scienza, però, consiste nella sua capacità di andare oltre le certezze, di mettersi sempre in discussione, di provare sempre qualcosa di nuovo. A un'analisi più approfondita, sembra che la diffusione standard abbia qualche problema a descrivere accuratamente i fenomeni più complessi in natura.

Un esempio interessante di possibili discrepanze tra il modello di diffusione classico e misurazioni concrete si osserva nei mercati finanziari, come puntualizzato in Tintner (1940) e Mandelbrot (1967). Raccogliendo le oscillazioni (ad esempio mensili) di un prodotto (ad esempio la lana) ci possiamo aspettare che (in assenza di altri fenomeni) la media di queste oscillazioni sia nulla e che la maggior parte di queste oscillazioni sia “piccola” (la lana tra un mese costerà forse un po' di più, forse un po' di meno di quel che costa oggi). Potremmo quindi disegnare un istogramma in cui sull'asse orizzontale si pone la variazione di prezzo (che può essere positiva o negativa, e “discretizzata” in intervalli di prezzo, ad esempio \$2.50) e in verticale il numero di casi in cui tale variazione viene realizzata (all'interno della discretizzazione scelta). L'istogramma della Fig. 5 a pagina 167 di Tintner (1940) conferma la nostra intuizione che questa distribuzione di prezzi sia in effetti circa a media nulla e che la maggior parte dei valori “alti” corrispondano a variazioni piccole (c'è un picco nello zero delle variazioni).

Se crediamo al paradigma della diffusione classica, dobbiamo assumere che questo istogramma rappresenta una discretizzazione della Gaussiana (10). Per trovare la Gaussiana che approssima meglio l'istogramma, potremmo pensare di calcolare la varianza dei dati raccolti e scegliere quindi la Gaussiana corrispondente alla varianza trovata (secondo la terminologia discussa nella nota 3). Il risultato è quello descritto in Tintner (1940): la Gaussiana selezionata non è per nulla soddisfacente, è troppo “schiacciata” e manca completamente i valori più alti della distribuzione, corrispondenti proprio alle piccole oscillazioni di prezzo che sappiamo rappresentare il caso più frequente!

Così non va bene. Ma cos'è andato storto? Per svelare il mistero, supponiamo per un attimo che la varianza σ dei dati raccolti sia molto grande. Questo (ricordando la notazione nella nota 3) produrrebbe una Gaussiana molto

schiacciata, proprio come succede in Tintner (1940). Ciò suggerirebbe che la variazione dei prezzi rappresentata in Tintner (1940) potrebbe avere sostanzialmente variazione “infinita” (nell’astrazione matematica di poter raccogliere infiniti dati), per cui l’approssimazione ottenuta con la Gaussiana risulta insoddisfacente, perché troppo schiacciata, e raccogliere ulteriori dati non risolverebbe la questione.

Ma è veramente possibile che una varianza sia infinita? Questa è una domanda spinosa, che ha prodotto vari disaccordi tra scienziati di valore; si veda ad esempio Mandelbrot (1961) e le referenze ivi citate. Diciamocelo, chi lascia la strada vecchia per la nuova, ecc.: abbandonare la diffusione classica, che tanti successi ha riscosso, rischia di essere un salto nel buio:

la diffusione classica ha una chiara
interpretazione in termini statistici
(come descritto nella Sezione 3.2) (12)

e

la Gaussiana è una distribuzione “stabile”
(cioè la somma di variabili aleatorie
indipendenti con distribuzioni Gaussiane
ha essa stessa una distribuzione Gaussiana), (13)

per cui nessuna mente razionale abbandonerebbe il paradigma della diffusione classica a meno che queste due proprietà non vengano preservate anche in caso di varianze infinite!

8. UN PARADIGMA ALTERNATIVO

In realtà la maggior parte delle volte la scienza rivoluzionaria non cambia un paradigma: nuove idee, nuove spiegazioni, nuovi paradigmi emergono e coesistono con le strutture precedenti, per comprendere sfaccettature diverse della complessità del mondo che ci circonda. Quindi, anche in questo caso, l’obiettivo non è “affondare” il paradigma della diffusione classica, quanto quello di fondare un’alternativa coerente, che possa trattare anche fenomeni diversi.

Per questo scopo comunque è necessario capire se (12) e (13) rimangono valide, in qualche senso, in un nuovo paradigma che comprenda anche distribuzioni con infinita varianza e possa rendere giustizia al dilemma offerto da Tintner, 1940. Anzitutto, situazioni di questo tipo furono considerate da Benoît Mandelbrot (il famoso matematico noto per i suoi lavori sulla geometria

frattale) alla luce della teoria delle distribuzioni “ α -stabili” introdotta da Paul Lévy (Lévy, 1925; Mandelbrot, 1967). In poche parole, l’idea di Lévy era che la proprietà (13) non fosse esclusiva delle Gaussiane: in sostanza, la (13) segue dal fatto che la funzione caratteristica di una variabile aleatoria Gaussiana è anch’essa Gaussiana, e che il prodotto di Gaussiane è anch’essa Gaussiana, ma una situazione similmente “stabile” si produrrebbe se le funzioni caratteristiche delle variabili aleatorie in questione non fossero Gaussiane, ma oggetti del tipo $\exp(-|\xi|^\alpha)$, dove il parametro α varia tra 0 e 2 (con il caso della diffusione classica riprodotto quando $\alpha = 2$).

Con questa formulazione, è possibile riprodurre la “stabilità” osservata nella (13) (tuttavia, la varianza corrispondente ai casi $\alpha \in (0, 2)$ è infinita): si veda l’Appendice C per ulteriori dettagli.

Grazie al lavoro di Lévy è anche possibile dare una solida interpretazione statistica a una variante⁵ “anomala” e “nonlocale” dell’equazione di diffusione (2), che si può scrivere come

$$\partial_t u = -(-\Delta)^{\alpha/2} u, \quad (14)$$

dove $(-\Delta)^{\alpha/2}$ rappresenta l’operatore di Laplace frazionario, con $\alpha \in (0, 2)$. Si veda l’Appendice D per ulteriori dettagli.

9. L’ANOMALO È LA NORMA

La diffusione anomala non è stata riscontrata solo nei modelli finanziari descritti in Tintner, 1940. Anzi, è apparsa in varie occasioni in modelli di matematica biologica, anche per descrivere (tra varie controversie) il modo con cui varie specie animali si muovono nell’ambiente (Hapca *et al.*, 2009; Seuront *et al.*, 2014; Harasti *et al.*, 2015; Mann *et al.*, 2015; Broadbridge *et al.*, 2022), in modelli di trasmissione neurale (Lamanna *et al.*, 2024), nei nanotubi di carbonio (Wang e Chen, 2022), vortici ottici (Gong *et al.*, 2024), ecc., e l’interpretazione stessa dei dati sperimentali legati a meccanismi di diffusione anomala è spesso alquanto complessa e richiede a volte l’uso di intelligenza artificiale (Muñoz-Gil *et al.*, 2021).

⁵In queste poche pagine ci occuperemo, e solo in maniera superficiale, di un tipo di diffusione anomala, corrispondente a un’equazione nonlocale nelle variabili spaziali. Altre diffusioni anomale emergono naturalmente in molti altri contesti, ad esempio in presenza di operatori di diffusione nonlineari, equazioni di mezzi porosi, ecc., si veda ad esempio (Vázquez, 2007; Daskalopoulos e Kenig, 2007) e le referenze ivi contenute per maggiori informazioni su altri tipi di diffusione anomala.

Una pittoresca visualizzazione dei possibili “lunghi salti” legati al concetto di diffusione anomala potrebbe essere offerta dal sito “Where's George?” <https://www.wheresgeorge.com/>. George in questo caso sarebbe George Washington, che campeggia sulla banconota da un dollaro americano. Il sito traccia la circolazione geografica di alcune banconote e, secondo Brockmann *et al.* (2006) «the distribution of travelling distances decays as a power law, indicating that trajectories of bank notes are reminiscent of scalefree random walks known as Lévy flights».⁶

10. L'IMPORTANZA DI ESSERE ANOMALO: TUTTE LE FUNZIONI SONO α -ARMONICHE

Ma la diffusione anomala è poi così anomala? Non è che alla fine, al di là di qualche dettaglio tecnico, il mondo “anomalo” finisce per essere una qualche copia di quello classico, con qualche piccola deformazione che interessa al massimo qualche matematico con troppo tempo a disposizione?

Dunque, anzitutto, la diffusione anomala presenta delle differenze strutturali profonde e significative, si veda ad esempio la Sezione 2 in Abatangelo e Valdinoci (2019) per una lista di dieci differenze tra l'operatore classico di Laplace e la sua versione nonlocale in (14).

Una delle differenze più significative, a nostro avviso, consiste nel fatto che «tutte le funzioni sono localmente α -armoniche, a meno di un piccolo errore», come mostrato in Dipierro *et al.* (2017).

Per capire questo enunciato, consideriamo anzitutto il caso classico. Una funzione “armonica” (cioè con Laplaciano nullo) è davvero molto speciale. In particolare, non può avere massimi o minimi locali: ad esempio, un paraboloide non può essere armonico, perché il suo Laplaciano è una costante (non nulla), e in una dimensione le funzioni armoniche sono solo rette (o, localmente, porzioni di rette).

Il caso dell' α -Laplaciano è invece completamente diverso. A meno di un piccolo errore, ogni funzione può essere localmente α -armonica. In particolare, funzioni α -armoniche possono sviluppare massimi e minimi locali, funzioni α -armoniche possono essere localmente molto simili a paraboloidi, o a quello che vogliamo noi. Più precisamente, data una qualsiasi regione dello

⁶ Ad esempio, secondo Where's George? Bill tracking report, la banconota da un dollaro «Serial# L6031—5A Series: 2001 [...] has traveled at least 27,775 Miles in 8 Yrs, 242 Days, 16 Hrs, 49 Mins at an average of 8.8 Miles per day. The bill is now 1,528 Miles from its starting location» (<https://wg4.us/b:ovuIyvTrS>, consultato il 18 settembre 2025).

spazio, una qualsiasi funzione e un qualsiasi errore fissato, possiamo trovare una funzione α -armonica nella regione assegnata che dista, in questa regione, dalla funzione data meno dell'errore assegnato.

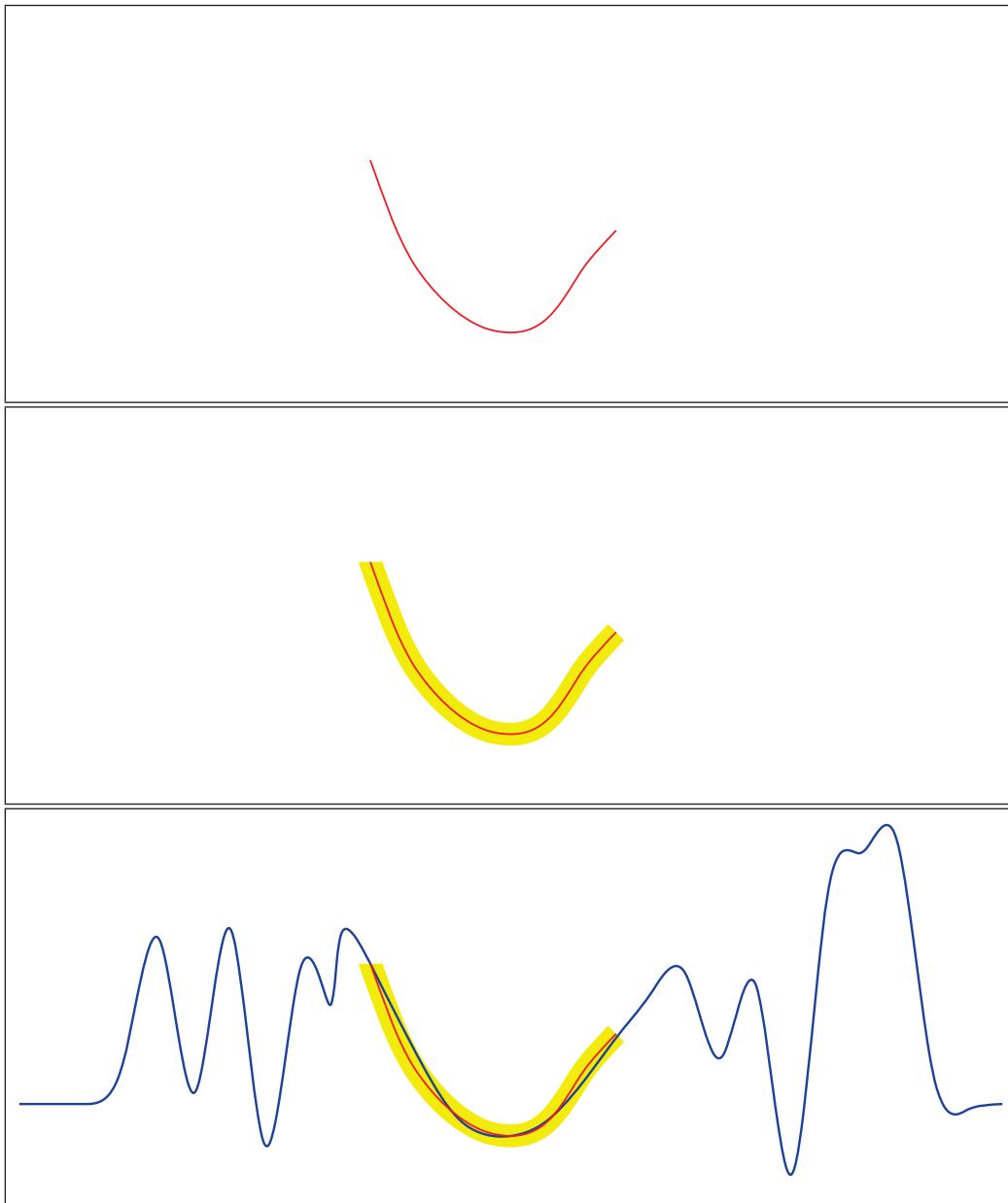


Fig. 4 – La funzione data u_0 (in rosso), un ε -intorno della funzione data (in giallo), la funzione α -armonica u_ε . Immagine prodotta dagli autori.

O se preferite, data una funzione qualsiasi in una regione qualsiasi, a meno di “aggiustarla” arbitrariamente poco in questa regione e “completarla” opportunamente fuori da questa regione, possiamo sempre ottenere una funzione α -armonica, si veda Fig. 4.

In matematiche:

Teorema 1 *Dato $\alpha \in (0, 2)$, data una palla $B \subset \mathbb{R}^d$, data una funzione $u_0 \in C^2(\overline{B})$ e dato $\varepsilon > 0$, esiste una funzione $u_\varepsilon \in C^2(\overline{B}) \cap C_c(\mathbb{R}^d)$ tale che*

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha/2} u_\varepsilon = 0 \text{ in } B, \\ \|u - u_\varepsilon\|_{C^2(\overline{B})} \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Saremo di parte, ma secondo noi il Teorema 1 è proprio un bel teorema. E come tutti i bei teoremi ha anche delle belle applicazioni. Per esempio, una delle sue conseguenze è che una popolazione che utilizza una strategia di insediamento nonlocale può utilizzare al meglio le risorse ambientali in una regione strategica assegnata, riducendo all'osso gli sprechi, cosa che invece non è possibile a popolazioni che utilizzano il paradigma diffusivo classico.

Per descrivere meglio questo risultato, ricordiamo l'equazione logistica della dinamica delle popolazioni. In questo contesto, possiamo pensare di avere una densità di popolazione $u(x, t)$ che evolve in base alle seguenti considerazioni:

- se la densità di popolazione è bassa, il tasso di incremento della popolazione è proporzionale alla risorsa ambientale $\rho(x)$;
- se la densità di popolazione è troppo alta, si innescano meccanismi di competizione, che impediscono crescite smisurate della popolazione stessa;
- la popolazione si sposta nell'ambiente rispetto a un'operatore di diffusione \mathcal{L} .

In matematiche, questo si può tradurre nell'equazione

$$\partial_t u = \mathcal{L}u + (\rho - u)u \quad \text{in } B, \tag{15}$$

dove la palla B è la regione strategica che stiamo considerando.

In una condizione di equilibrio, la soluzione u è stazionaria (cioè indipendente dal tempo) e la (15) si riduce a

$$-\mathcal{L}u = (\rho - u)u \quad \text{in } B, \tag{16}$$

con $u = u(x)$.

Ora, una delle conseguenze del Teorema 1 è che la situazione è molto diversa se la diffusione della popolazione è classica (con \mathcal{L} uguale all'operatore di Laplace) o nonlocale (in cui \mathcal{L} è uguale a $-(-\Delta)^{\alpha/2}$ con $\alpha \in (0, 2)$). Infatti, la popolazione nonlocale può utilizzare ottimamente quasi tutta la risorsa, mentre quella classica, in generale, no. Più precisamente, nel caso in cui $\mathcal{L} = -(-\Delta)^{\alpha/2}$ con $\alpha \in (0, 2)$, data $\rho \in C^2(\mathbb{R}^d)$ con $\rho = 0$ fuori da B , e dato $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, esiste una risorsa ρ_ε vicina a quella data (nel senso che $\|\rho - \rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\overline{B})} \leq \varepsilon$) e una soluzione u_ε della corrispondente equazione logistica nonlocale

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u_\varepsilon = (\rho_\varepsilon - u_\varepsilon) u_\varepsilon \quad \text{in } B, \quad (17)$$

con $u_\varepsilon = 0$ su ∂B e in grado di consumare tutta la risorsa senza sprechi (cioè $u_\varepsilon \geq \rho_\varepsilon$ in B ; si veda l'Appendice E per una dimostrazione di questo fatto).

Questa proprietà è tipica esclusivamente della diffusione nonlocale e un risultato del genere non è vero nel caso della diffusione classica, si veda l'Appendice F.

Varie applicazioni di questo tipo della teoria della diffusione nonlocale a modelli di biologia sono state proposte in Caffarelli *et al.* (2017).

APPENDICI

A. DALLA (1) ALL'EQUAZIONE DEL CALORE

Per vedere come la (1) produca la (2), possiamo assumere, a meno di traslazioni spaziali, che $x = 0$, dividere per $\tau = \rho^{d+2}$ e prendere il limite per $\tau \rightarrow 0$. Effettuiamo il calcolo nel caso unidimensionale $d = 1$ (il caso multidimensionale non è molto più difficile, ma richiede la cancellazione di alcuni termini per motivi di “simmetria”).

In questo modo, dalla (1) si ottiene, almeno formalmente,

$$\begin{aligned} \partial_t u(0, t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u(0, t + \tau) - u(0, t)}{\tau} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{c_0}{\rho^3} \int_{-\rho}^{\rho} (u(y, t) - u(0, t)) dy. \end{aligned}$$

Ora, uno sviluppo di Taylor del tipo

$$u(y, t) = u(0, t) + \partial_x u(0, t) y + \frac{1}{2} \partial_x^2 u(0, t) y^2 + O(|y|^3)$$

conduce a

$$\partial_t u(0, t) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{c_0}{\rho^3} \int_{-\rho}^{\rho} \left(\partial_x u(0, t) y + \frac{1}{2} \partial_x^2 u(0, t) y^2 + O(|y|^3) \right) dy.$$

La funzione che associa a y la quantità $\partial_x u(0, t) y$ è dispari (cambiando il segno di y , cambiamo il segno di questa quantità), per cui il suo contributo sull'intervallo simmetrico è, in media, nullo, infatti

$$\int_{-\rho}^{\rho} \partial_x u(0, t) y dy = \partial_x u(0, t) \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{(-\rho)^2}{2} \right) = 0.$$

Inoltre, se y appartiene all'intervallo $(-\rho, \rho)$, abbiamo che $|y|^3 \leq \rho^3$ e quindi

$$\int_{-\rho}^{\rho} O(|y|^3) dy = O(\rho^4).$$

Da queste considerazioni, vediamo che

$$\begin{aligned} \partial_t u(0, t) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{c_0}{2\rho^3} \int_{-\rho}^{\rho} \partial_x^2 u(0, t) y^2 dy + O(\rho) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{c_0}{2\rho^3} \int_{-\rho}^{\rho} \partial_x^2 u(0, t) y^2 dy \\ &= \frac{c_0}{3} \partial_x^2 u(0, t), \end{aligned}$$

che corrisponde alla (2) con, in questo caso, $c := \frac{c_0}{3}$.

B. DALLA (3) ALL'EQUAZIONE DEL CALORE

Come nell'Appendice A, effettuiamo il calcolo nel caso unidimensionale $d = 1$ (il caso multidimensionale non è molto più difficile, ma richiede la cancellazione di alcuni termini per motivi di "simmetria").

In questo caso, la palla unitaria unidimensionale è il segmento $(-1, 1)$, il cui bordo sono i due punti -1 e $+1$, quindi il membro di destra della (3) diventa

$$\frac{u(x + h, t) + u(x - h, t)}{2}.$$

Allora, sottraendo $u(x, t)$ ad ambo i membri della (3), dividendo per $\tau = h^2$ e prendendo il limite abbiamo che

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h, t) + u(x - h, t) - 2u(x, t)}{2h^2} \\ &= \frac{1}{4} \partial_x^2 u(x, t),\end{aligned}$$

che corrisponde alla (2) con, in questo caso, $c := \frac{1}{4}$.

C. DISTRIBUZIONI STABILI E (13)

Consideriamo due variabili aleatorie X e \bar{X} . Assumiamo che siano indipendenti e che

$$\begin{aligned}X \text{ e } \bar{X} \text{ abbiano funzioni caratteristiche} \\ \text{uguali rispettivamente a } \exp(-|\kappa \xi|^\alpha) \text{ e } \exp(-|\bar{\kappa} \xi|^\alpha),\end{aligned}\quad (18)$$

con $\kappa, \bar{\kappa} > 0$ e $\alpha \in (0, 2]$. Consideriamo anche la somma $X_\star = X + \bar{X}$ di queste variabili aleatorie.

Mostriamo che

$$\begin{aligned}X_\star \text{ ha funzione caratteristica uguale a} \\ \exp(-|\kappa_\star \xi|^\alpha), \text{ con } \kappa_\star = (\kappa^\alpha + \bar{\kappa}^\alpha)^{1/\alpha}.\end{aligned}\quad (19)$$

Questa affermazione costituisce un valido analogo della “stabilità” introdotta in (13) per la diffusione classica (corrispondente a $\alpha = 2$) nel caso di distribuzioni con varianza infinita (corrispondente a $\alpha \in (0, 2)$).

Per convincerci della (19), osserviamo che (denotando la funzione caratteristica nello spazio di probabilità con la lettera \mathcal{C}),

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{X_\star}(\xi) &:= \int e^{2\pi i \xi X_\star} d\mathbb{P} = \int e^{2\pi i \xi (X + \bar{X})} d\mathbb{P} \\ &= \int e^{2\pi i \xi X} e^{\pi i \xi \bar{X}} d\mathbb{P} = \int e^{2\pi i \xi X} d\mathbb{P} \int e^{2\pi i \xi \bar{X}} d\mathbb{P},\end{aligned}$$

in cui l’ultima uguaglianza è dovuta all’indipendenza delle variabili aleatorie X e \bar{X} .

Quindi, usando (18),

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{X_*}(\xi) &= \int e^{2\pi i \xi X} d\mathbb{P} \int e^{2\pi i \bar{X}} d\mathbb{P} = \mathcal{C}_X(\xi) \mathcal{C}_{\bar{X}}(\xi) \\ &= \exp(-|\kappa \xi|^\alpha) \exp(-|\bar{\kappa} \xi|^\alpha) = \exp(-(|\kappa|^\alpha + |\bar{\kappa}|^\alpha)|\xi|^\alpha),\end{aligned}$$

che conduce alla (19).

D. INTERPRETAZIONE STATISTICA DELL'EQUAZIONE NONLOCALE DEL CALORE

Questa è una variante “a lungo raggio” dell’Appendice B. Consideriamo la densità di probabilità $u(x, t)$ di trovare una particella nel punto x al tempo t e scriviamo che $u(x, t + \tau)$ corrisponde alla media delle densità di probabilità $u(x \pm hr, t)$ di trovare una particella in un punto $x \pm hr$ al tempo t moltiplicate per la densità di probabilità $\mathbb{P}(r)$ corrispondente a un salto di lunghezza r (dove τ e h sono piccoli incrementi temporali e spaziali, rispettivamente):

$$u(x, t + \tau) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (u(x + hr, t) + u(x - hr, t)) \mathbb{P}(r) dr.$$

Sottraendo $u(x, t)$ ad ambo i membri, dividendo per $\tau = h^\alpha$ e passando formalmente al limite, otteniamo

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h^\alpha} \int_0^{+\infty} (u(x + hr, t) + u(x - hr, t) - 2u(x, t)) \mathbb{P}(r) dr \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} (u(x + y, t) + u(x - y, t) - 2u(x, t)) \mathbb{P}\left(\frac{y}{h}\right) dy.\end{aligned}\tag{20}$$

In questo caso, la probabilità di salto della particella è determinata da una distribuzione α -stabile come quelle descritte nell’Appendice C, con $\alpha \in (0, 2)$.

Supponiamo quindi che la corrispondente funzione caratteristica sia

$$\exp(-|\kappa \xi|^\alpha),$$

con $\kappa > 0$.

Allora,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in [r, r + \rho]) &= \mathbb{P}\left(\frac{X - r}{\rho} - \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \\ &= \int \chi_{[-1/2, 1/2]}\left(\frac{X - r}{\rho} - \frac{1}{2}\right) d\mathbb{P}.\end{aligned}\quad (21)$$

Osserviamo ora che per una funzione (liscia e a decrescenza rapida) φ possiamo considerare la Trasformata di Fourier e ottenere che

$$\begin{aligned}\int \varphi\left(\frac{X - r}{\rho} - \frac{1}{2}\right) d\mathbb{P} &= \int \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i \left(\frac{X-r}{\rho} - \frac{1}{2}\right) \xi} d\xi \right) d\mathbb{P} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\xi) \left(\int e^{2\pi i \frac{\xi}{\rho} X} d\mathbb{P} \right) e^{-2\pi i \left(\frac{r}{\rho} + \frac{1}{2}\right) \xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\xi) \mathcal{C}_X\left(\frac{\xi}{\rho}\right) e^{-2\pi i \left(\frac{r}{\rho} + \frac{1}{2}\right) \xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\xi) \exp\left(-\frac{\kappa^\alpha |\xi|^\alpha}{\rho^\alpha}\right) e^{-2\pi i \left(\frac{r}{\rho} + \frac{1}{2}\right) \xi} d\xi \\ &= \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\rho\eta) \exp(-\kappa^\alpha |\eta|^\alpha) e^{-2\pi i (r + \frac{\rho}{2})\eta} d\eta \\ &= \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(0) \exp(-\kappa^\alpha |\eta|^\alpha) e^{-2\pi i r\eta} d\eta + o(\rho) \\ &= \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i \eta r) \exp(-\kappa^\alpha |\eta|^\alpha) d\eta + o(\rho).\end{aligned}$$

Applicando, con un po' di flessibilità analitica, questa osservazione con

$$\varphi := \chi_{[-1/2, 1/2]},$$

si ottiene da (21) che

$$\mathbb{P}(X \in [r, r + \rho]) = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i \eta r) \exp(-\kappa^\alpha |\eta|^\alpha) d\eta + o(\rho).$$

Possiamo allora determinare la corrispondente densità di probabilità

$$\mathbb{P}(r) = \left. \frac{d}{d\rho} \left(\mathbb{P}(X \in [r, r + \rho]) \right) \right|_{\rho=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i \eta r) \exp(-\kappa^\alpha |\eta|^\alpha) d\eta,$$

che è la Trasformata di Fourier della funzione caratteristica.

Notiamo che, integrando per parti e cambiando variabile $\mu := \frac{\eta y}{h}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{y}{h}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2\pi i \eta y}{h}\right) \exp(-\kappa^\alpha |\eta|^\alpha) d\eta \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi \eta y}{h}\right) \exp(-\kappa^\alpha \eta^\alpha) d\eta \\ &= \frac{h}{\pi y} \int_0^{+\infty} \frac{d}{d\eta} \left[\sin\left(\frac{2\pi \eta y}{h}\right) \right] \exp(-\kappa^\alpha \eta^\alpha) d\eta \\ &= \frac{\alpha \kappa^\alpha h}{\pi y} \int_0^{+\infty} \eta^{\alpha-1} \sin\left(\frac{2\pi \eta y}{h}\right) \exp(-\kappa^\alpha \eta^\alpha) d\eta \\ &= \frac{\alpha \kappa^\alpha h^{1+\alpha}}{\pi y^{1+\alpha}} \int_0^{+\infty} \mu^{\alpha-1} \sin(2\pi \mu) \exp\left(-\frac{\kappa^\alpha h^\alpha \mu^\alpha}{y^\alpha}\right) d\mu. \quad (22) \end{aligned}$$

Quando $h \rightarrow 0$, abbiamo anche (si veda Exercise 2.2.33 in Dipierro e Valdinoci, 2026)

$$\mathbb{P}\left(\frac{y}{h}\right) = \frac{c^* h^{1+\alpha}}{y^{1+\alpha}} (1 + o(1)),$$

per un qualche $c^* \in \mathbb{R}$ dipendente da α e κ (e sappiamo che $c^* > 0$, visto che il termine di partenza è positivo).

Possiamo allora utilizzare questa informazione nella (20) e ottenere che

$$\partial_t u(x, t) = \frac{c^*}{2} \int_0^{+\infty} \frac{u(x+y, t) + u(x-y, t) - 2u(x, t)}{y^{1+\alpha}} dy.$$

E. LA DIFFUSIONE NONLOCALE PUÒ USARE AL MEGLIO LE RISORSE AMBIENTALI

Sia \mathcal{B} una palla concentrica a B e di raggio doppio. Tramite il Teorema 1, troviamo una funzione $\tilde{\rho}_\varepsilon \in C^2(\bar{\mathcal{B}}) \cap C_c(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha/2} \tilde{\rho}_\varepsilon = 0 & \text{in } \mathcal{B}, \\ \|\rho - \tilde{\rho}_\varepsilon\|_{C^2(\bar{\mathcal{B}})} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Sia anche v_ε la funzione α -armonica in B con $v_\varepsilon = \tilde{\rho}_\varepsilon$ in $\mathcal{B} \setminus B$ e $v_\varepsilon = 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{B}$.

Notiamo che

$$\sup_{\mathbb{R}^d \setminus B} |v_\varepsilon| = \sup_{\mathcal{B} \setminus B} |\tilde{\rho}_\varepsilon| \leq \sup_{\mathcal{B} \setminus B} |\rho| + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

e quindi, per il principio di massimo (si veda ad esempio Theorem 3.3.2 in Bucur e Valdinoci, 2016),

$$\sup_{\mathbb{R}^d} |v_\varepsilon| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia dunque

$$u_\varepsilon := \rho_\varepsilon := \tilde{\rho}_\varepsilon - v_\varepsilon.$$

Abbiamo che, in B ,

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u_\varepsilon = (-\Delta)^{\alpha/2} \tilde{\rho}_\varepsilon - (-\Delta)^{\alpha/2} v_\varepsilon = 0 = (\rho_\varepsilon - u_\varepsilon) u_\varepsilon.$$

Inoltre, v_ε è continua su \mathcal{B} (si veda Ros-Oton e Serra, 2014). Quindi, su ∂B ,

$$u_\varepsilon = \tilde{\rho}_\varepsilon - v_\varepsilon = 0.$$

Infine,

$$\begin{aligned} \|\rho - \rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\overline{B})} &= \|\rho - \tilde{\rho}_\varepsilon + v_\varepsilon\|_{L^\infty(\overline{B})} \\ &\leq \|\rho - \tilde{\rho}_\varepsilon\|_{L^\infty(\overline{B})} + \|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\overline{B})} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

F. LA DIFFUSIONE CLASSICA PUÒ “SPRECARE” LE RISORSE AMBIENTALI

La proprietà descritta dopo la (17) è squisitamente nonlocale e non è verificata in genere nel caso di diffusione standard. Per convincerci di questo fatto, consideriamo il caso unidimensionale, in cui $B = (-1, 1)$ e prendiamo una funzione $\rho \in C_c^\infty((-1, 1))$ tale che $\rho(0) = 1$.

Supponiamo di aver trovato una nuova distribuzione di risorsa ρ_ε tale che $\|\rho - \rho_\varepsilon\|_{L^\infty((-1, 1))} \leq \varepsilon$ e una soluzione della corrispondente equazione logistica classica

$$-u_\varepsilon'' = (\rho_\varepsilon - u_\varepsilon) u_\varepsilon \text{ in } (-1, 1)$$

con

$$u_\varepsilon(-1) = u_\varepsilon(1) = 0 \quad (23)$$

e $u_\varepsilon \geq \rho_\varepsilon$ in $(-1, 1)$ (assumendo ε piccolo a piacere).

Allora, in $(-1, 1)$, abbiamo che $u_\varepsilon'' = (u_\varepsilon - \rho_\varepsilon)u_\varepsilon \geq 0$, cioè u_ε è convessa e quindi, da (23), abbiamo che $u_\varepsilon(0) \leq 0$.

Da queste considerazioni, segue che

$$0 = u_\varepsilon(0) \geq \rho_\varepsilon(0) \geq \rho(0) - \varepsilon = 1 - \varepsilon,$$

che produce una contraddizione quando $\varepsilon < 1$.

BIBLIOGRAFIA

- Abatangelo N. and Valdinoci E. (2019). *Getting acquainted with the fractional Laplacian*. In: Abatangelo N. and Valdinoci E., ed. by Dipierro S., *Contemporary research in elliptic PDEs and related topics. Based on lectures given during the INdAM intensive period, University of Bari, Bari, Italy, April 10-June 9, 2017*, Cham: Springer, 1-105.
- Broadbridge P., Hutchinson A.J., Li X., and Mann B.Q. (2022). *Stratified mobility fishery models with harvesting outside of no-take areas*. In: «Appl. Math. Modelling», 105: 29-49.
- Brockmann D., Hufnagel L. and Geisel T. (2006). *The scaling laws of human travel*. In: «Nature», 439: 462-465.
- Bucur C. and Valdinoci E. (2016). *Nonlocal diffusion and applications*. In: Bucur C. and Valdinoci E., *Lect. Notes Unione Mat. Ital.*, vol. 20. Cham-Bologna: Springer-UMI.
- Caffarelli L., Dipierro S. and Valdinoci E. (2017). *A logistic equation with nonlocal interactions*. In: «Kinet. Relat. Models», 10(1): 141-170.
- Cossetto T. (2012). *Moto browniano e ipotesi atomica*. Testo disponibile all'url: <https://www.bo.infn.it/~apesci/Cossetto.pdf> [consultato il 18 settembre 2025].
- Daskalopoulos P. and Kenig C.E. (2007). *Degenerate diffusions. Initial value problems and local regularity theory*. In: Daskalopoulos P. and Kenig C.E., *EMS Tracts Math*, vol. 1. Zürich: European Mathematical Society (EMS).
- Dipierro S., Savin O. and Valdinoci E. (2017). *All functions are locally s -harmonic up to a small error*. In: «J. Eur. Math. Soc.», 19(4): 957-966.
- Dipierro S. and Valdinoci E. (cds). *A primer on Fourier Transform*.
- Einstein A. (1905). *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*. In: «Ann. der Phys.», (4)17: 549-560.
- Gong J., Li Q., Zeng S. and Wang J. (2024). *Non-gaussian anomalous diffusion of optical vortices*. In: «Phys. Rev. E.», 109: 024111.
- Hapca S., Crawford J.W. and Young I.M. (2009). *Anomalous diffusion of heterogeneous populations characterized by normal diffusion at the individual level*. In: «J. R. Soc. Interface», 6(30): 111-122.
- Harasti D., Lee K.A., Gallen C., Hughes J.M. and Stewart J. (2015). *Movements, home range and site fidelity of snapper (*Chrysophrys auratus*) within a temperate marine protected area*. In: «PLoS ONE», 10(11): e0142454.
- Lamanna J., Gloria G., Villa A. and Malgaroli A. (2024). *Anomalous diffusion of synaptic vesicles and its influences on spontaneous and evoked neurotransmission*. In: «J. Physiol.», 602(12): 2873-2898.
- Lévy P. (1925). *Calcul des probabilités*. Paris: Gauthier-Villars.
- Mandelbrot B. (1961). Post scriptum to “Final note”. In: «Inf. Control.», 4: 300-304.
- Id. (1967). *The variation of some other speculative prices*. In: «J. Business», 40(4): 393-413.

- Mann B.Q., Cowley P.D. and Fennessy S.T. (2015). *Movement patterns of surf-zone fish species in a subtropical marine protected area on the east coast of South Africa*. In: «African J. Marine Sci.», 37(1): 99-114.
- Muñoz-Gil G., Corominas G.G. and Lewenstein M. (2021). *Unsupervised learning of anomalous diffusion data: an anomaly detection approach*. In: «J. Phys. A, Math. Theor.», 54(50): 19, Id/No 504001.
- Newburgh R., Peidle J. and Rueckner W. (2006). *Einstein, Perrin, and the reality of atoms: 1905 revisited*. In: «Amer. J. Physics», 74(6): 478-481.
- Ros-Oton X. and Serra J. (2014). *The Dirichlet problem for the fractional Laplacian: regularity up to the boundary*. In: «J. Math. Pures Appl.» 9, 101(3): 275-302.
- Seuront L. and Stanley H.E. (2014). *Anomalous diffusion and multifractality enhance mating encounters in the Ocean*. In: «Proc. Natl. Acad. Sci. USA», 111(6): 2206-2211.
- Tintner G. (1940). *The variate difference method*. In: *Cowles Commission for Research in Economics 5*. Bloomington: The Principia Press.
- Vázquez J.L. (2007). *The porous medium equation*. In: *Mathematical theory*. Oxford: University Press.
- Wang Y. and Chen J. (2022). *From normal to anomalous diffusion of water molecules in narrow carbon nanotubes with defects, gases, and salts*. In: «Europhys. Lett.», 139(5): 51002.