Lo sviluppo di abilità numeriche e aritmetiche nei bambini: l'elaborazione di quantità simboliche e non simboliche

The development of numerical and arithmetical skills in children: The processing of symbolic and non-symbolic quantities

Chiara Valeria Marinelli*, Marco Turi°, Pierpaolo Limone^,
Giuliana Nardacchione*, Guendalina Peconio**, Giusi Toto**

* Cognitive and affective neuroscience lab, Università di Foggia,
Via Arpi, 176 – 71122 Foggia (Italia);
e-mail: chiaravaleria.marinell@unifg.it;
e-mail: giuliana.nardacchione@unifg.it.
° Laboratorio di psicologia applicata, Università del Salento,
Piazza Tancredi, 7 – 73100 Lecce (Italia);
e-mail: marco.turi@unisalento.it.
^ Department di Studi Umanistici, Università Pegaso,
Piazza Trieste e Trento, 48 – 80143 Napoli (Italia);
e-mail: pierpaolo.limone@unipegaso.it.
** Learning sciences hub, Università di Foggia,
Via Arpi, 176 – 71122 Foggia (Italia);
e-mail: guendalina.peconio@unifg.it;
e-mail: giusi.toto@unifg.it.

Ricevuto: 07.02.2024 **– Accettato**: 21.11.2024

Pubblicato online: 07.02.2025

C. V. Marinelli et al. / *Ricerche di Psicologia, 2024, Vol. 47*
ISSNe 1972-5620, Doi: 10.3280/rip2024oa19335

Riassunto

L'acquisizione di competenze numeriche e matematiche è uno degli obiettivi primari dell'istruzione formale.. Il presente contributo è una rassegna critica degli studi che hanno esaminato lo sviluppo dell'elaborazione di quantità simboliche e non simboliche nei bambini di scuola primaria, e dell'impatto che queste abilità hanno sullo sviluppo delle competenze aritmetiche. Inoltre, sono esaminate le evidenze sulla discalculia evolutiva e sull'efficacia dei training per lo sviluppo della rappresentazione numerica. Una maggiore comprensione dello sviluppo della capacità di elaborare numerosità simboliche e non simboliche è fondamentale per predisporre interventi didattici più efficaci per l'acquisizione delle abilità numeriche e aritmetiche.

Parole chiave: abilità numeriche, abilità aritmetiche, numerosità simboliche e non simboliche, senso del numero, metodo analogico Bortolato.

Abstract

The acquisition of numerical and mathematical skills is one of the primary objectives of formal education. This contribution is a critical review of the studies that have examined the development of the processing of symbolic and non-symbolic quantities in primary school children, and the impact that these skills have on the development of arithmetic skills. Furthermore, the evidence on developmental dyscalculia and the effectiveness of training for the development of numerical representation is examined. Understanding the development of symbolic and non-symbolic numerical magnitude is fundamental to plan more effective didactic interventions for the acquisition of numerical and arithmetic skills.

Keywords: Numerical skills, arithmetic skills, symbolic and non-symbolic numerical magnitude, number sense, Bortolato analogical method

Introduzione

Nella società attuale acquisire buone competenze numeriche è di fondamentale importanza. Le persone poco competenti nelle abilità numeriche hanno insuccessi scolastici (Duncan et al., 2007), problemi economici e sociali (Bynner & Parsons, 1997; Gerber, 2012), reddito inferiore (Basten, Jaekel, Johnson, Gilmore, & Wolke, 2015), peggiori condizioni di salute e problemi legali (Parsons & Bynner, 2005) ed anche problemi emotivi (si pensi all' "ansia matematica", intesa come una risposta affettiva negativa alla matematica che produce effetti deleteri sul rendimento matematico; Rubinsten et al., 2010; Vintere et al., 2021). Inoltre, una scarsa abilità numerica può avere un impatto negativo nelle attività di vita quotidiana, influenzando la puntualità, la gestione del tempo e l'utilizzo del denaro in compiti di semplici transizioni monetarie (l'acquisto di un giornale, il calcolo del resto, l'applicazione di sconti, ecc.; Vigna et al., 2022). La conoscenza numerica a 7 anni è predittiva dello status socio-economico (SES) a 42 anni, anche al netto di abilità intellettive, livello d'istruzione e SES della famiglia d'origine (Ritchie & Bates, 2013).

Pertanto, l'acquisizione di competenze numeriche e matematiche è uno degli obiettivi primari dell'istruzione formale. L'apprendimento formale della matematica nella scuola primaria si sviluppa a partire da meccanismi innati di quantificazione e competenze apprese in modo informale durante il periodo prescolare. La ricerca in neuroscienze cognitive è fondamentale per la progettazione e la valutazione di interventi educativi che favoriscano una migliore acquisizione delle rappresentazioni numeriche e, più in generale, delle abilità aritmetiche (De Smedt et al., 2013).

Le rappresentazioni numeriche

La cognizione numerica permette di identificare, ordinare e confrontare quantità (Berch, 2005; Butterworth, 1999, 2005a, 2005b, 2010; Desoete, Roeyers, & De Clercq, 2004; Gersten, Jordan e Flojo, 2005; Laski e Siegler, 2007).

Il passaggio da una rappresentazione analogica concreta, come le dita o un insieme di oggetti, a una rappresentazione verbale (simbolica) è molto complesso (Fayol, Camos, Roussel, 2000). Infatti, mentre nel sistema di rappresentazione analogica l'aumento della quantità si traduce anche in un aumento fisico della quantità, nel linguaggio non è presente questa trasparenza. L'etichetta verbale, infatti, è un'entità astratta senza alcun nesso con la quantità a cui corrisponde e il bambino deve gradualmente comprendere in maniera automatica la quantità corrispondente. Inoltre, i numeri simbolici sono organizzati secondo una cardinalità convenzionale, per cui a seconda della collocazione che un numero target ha nella catena numerica verbale è possibile comprendere se rappresenta una quantità minore (numeri precedenti) o maggiore (numeri successivi) di altri numeri. Pertanto, è necessario far riferimento alla linea mentale dei numeri per confrontare due o più numeri.

Le rappresentazioni numeriche sono tipicamente esplorate con la linea mentale numerica (Dehaene, 2011) o il confronto di quantità simboliche (numeri) o non simboliche (generalmente punti; si veda Schneider et al., 2017).

Nelle prove di linea mentale numerica i partecipanti collocano un dato numero su una linea orizzontale che raffigura un intervallo (con, ad esempio, agli estremi 0 e 100). Con la pratica, gli individui passano da una rappresentazione logaritmica (in cui numeri piccoli, come 2 e 3, sono posizionati molto più distanti dei numeri grandi, come 8 e 9) ad una lineare (in cui distanziano equamente le due coppie di numeri; Booth & Siegler, 2006; Siegler & Booth, 2004; Siegler & Opfer, 2003). La rappresentazione lineare si riscontra solo a partire dai 5 anni per la linea del 10 (Berteletti et al., 2010); dai 7 anni per la linea del 100 (Geary et al., 2007; Siegler & Booth, 2004) e dagli 11 anni per quella del 1000 (Booth & Siegler, 2006; Thompson & Opfer, 2010). I bambini con difficoltà di apprendimento della matematica (ad esempio, discalculici) evidenziano un ritardo nel passaggio da un trend logaritmico a uno lineare (Landerl et al., 2009; Reeve et al., 2015). L'accuratezza nella stima della linea numerica e il trend lineare correlano con le abilità aritmetiche attuali e future (e.g., Ashcraft & Moore, 2012; Gunderson, Ramirez, Beilock & Levine, 2012), anche al netto delle abilità cognitive e delle caratteristiche sociodemografiche (Bailey, Siegler & Geary, 2014; Booth & Siegler, 2006, 2008; Cowan & Powell, 2014; Fazio et al., 2014; Geary et al., 2008).

Le prove di confronto di quantità valutano la precisione e rapidità con cui un individuo discrimina la numerosità di un insieme di oggetti (non simbolica)[1] o la rappresentazione simbolica del numero (ad esempio, 5 o "cinque"). Nelle prove di numerosità non simboliche, gli insiemi di punti da stimare vengono presentati per tempi molto brevi, in modo da impedire di risolvere il compito grazie al conteggio piuttosto che in base al "senso del numero". La difficoltà nei compiti di confronto di quantità è manipolata variando il rapporto o la distanza numerica tra i due numeri/configurazione di punti. Ad esempio, è più difficile distinguere 12 e 9 punti (rapporto 0,75; distanza numerica 3) rispetto a distinguere 12 e 6 punti (rapporto 0,5; distanza numerica 6). *Gli effetti numerici di distanza/rapporto* evidenziano che i numeri sono rappresentati lungo un continuum (ad esempio, la "linea numerica mentale") e che le rappresentazioni di grandezza numerica si sovrappongono l'una all'altra. Poiché la somiglianza tra i numeri predice quanto bene sono discriminati, è evidente che i numeri più vicini sono rappresentati in modo più simile di quelli più distanti. Secondo il modello computazionale di Verguts e Fias (2004), i numeri sono dei nodi la cui attivazione si propaga secondo una *tuning curve* Gaussiana lungo la linea mentale numerica, con attivazione massima del nodo corrispondente alla quantità non simbolica rappresentata

[1] Per evitare che i partecipanti discriminino le quantità numeriche non simboliche basandosi sulle caratteristiche visive dei display (ad es. dimensione dei punti, densità, area totale) piuttosto che sul numero di punti, gli stimoli sono generalmente controllati per queste caratteristiche visive.

e un'attivazione progressivamente minore man mano che ci si allontana dal numero/nodo target.

A parità di distanza numerica, i tempi di confronto di numerosità aumentano con anche la dimensione dei numeri per *l'effetto della grandezza numerica*, per cui è più facile discriminare numerosità piccole piuttosto che grandi (Antell & Keating, 1983; Strauss & Curtis, 1981; Rouselle & Noel, 2007; Castro et al., 2009, 2012). L'*effetto di congruenza semantica* (Banks, Fujii & Kayra-Stuart, 1976) che riguarda il fatto che le persone sono più veloci nel confrontare due numerosità quando la grandezza complessiva è congruente con la semantica della domanda verbale. Ad esempio, valori piccoli vengono confrontati più rapidamente quando la domanda è formulata come "Qual è il più piccolo?", mentre valori grandi vengono confrontati più rapidamente quando la domanda è formulata come "Quale è più grande?".

Entrambi gli effetti sono stati dimostrati sia per le quantità simboliche che non simboliche, supportando l'ipotesi che entrambe sottendono alle stesse rappresentazioni sottostanti (Piazza, 2010).

Il confronto di quantità non simboliche è un indice dell'efficienza del proprio sistema di stima approssimativo del numero (*Approximate Number System*-ANS), antica e rudimentale capacità di discriminare tra grandezze numeriche non simboliche che è disponibile nella prima infanzia (Xu & Spelke, 2000) e condiviso con altre specie non umane (Feigenson, Dehaene, & Spelke, 2004). Le somiglianze nel modo in cui primati, neonati, bambini e adulti rappresentano ed elaborano le quantità numeriche non simboliche (Dehaene, 1997; Nieder & Dehaene, 2009) suggeriscono che l'ANS sia innato ma che diventi più preciso con lo sviluppo (Halberda & Feigenson, 2008; Libertus & Brannon, 2009). Un deficit primario nella capacità fondamentale di rappresentarsi e/o di elaborare informazioni sulla numerosità di un insieme rende faticoso ed ostacola l'apprendimento dei sistemi simbolici e delle procedure di calcolo proprie della matematica (Butterworth, 2011). La frazione di Weber (*w*), calcolata sulla base delle prestazioni nei compiti di stima numerica approssimata, è una misura dell'acuità (sensibilità) delle rappresentazioni numeriche. Individui con *w* più piccola hanno rappresentazioni più precise di quelli con una *w* maggiore, inoltre bassi valori di *w* sono predittori di migliore competenze nelle prove di aritmetica formale (Halberda et al., 2012).

Il confronto di numerosità simboliche, d'altra parte, fornisce una misura della comprensione dei simboli numerici e delle quantità esatte che essi rappresentano. L'esecuzione di questo compito è mediata da esperienze culturali con il sistema numerico simbolico e richiede tempo per svilupparsi, non essendo disponibile nei primi anni di vita (Nunez, 2017). L'elaborazione numerica simbolica inoltre migliora con l'età (Holloway & Ansari, 2009;

Sekuler & Mierkiewicz, 1977). Questa letteratura non mette in discussione se l'ANS esista o meno nel caso di numerosità simboliche, ma si interroga se le abilità numeriche simboliche hanno origine dalle abilità non simboliche e se i due sistemi condividono le stesse rappresentazioni. Le prestazioni nelle prove di confronto di numeri arabi possono dipendere da rappresentazioni sottostanti di natura non simbolica (Piazza, 2010), dal mapping tra i simboli numerici e le rappresentazioni non simboliche (Rouselle & Nöel, 2007), o dalla natura delle rappresentazioni simboliche stesse, che potrebbero non essere associate alle rappresentazioni numeriche non simboliche (Cohen, Kadosh & Walsh, 2007, si veda De Smedt et al., 2013).

Lo sviluppo delle abilità di elaborazione di numerosità simboliche e non simboliche

Le competenze di elaborazione di numerosità simboliche e non simboliche correlano e interagiscono tra loro durante lo sviluppo (De Smedt et al., 2013; Leibovich, Katzin, Harel e Henik, 2017). La visione dominante presuppone che dalla capacità approssimativa di discriminare numerosità non simboliche si sviluppi la capacità più sofisticata, analitica e culturalmente mediata di elaborare numerosità simboliche (Bugden, DeWind, & Brannon, 2016; Merkley & Ansari, 2016; Siegler & Lortie-Forgues, 2014). Infatti, come evidenzia Dehaene (2008, p. 552), "*when we learn number symbols, we simply attach their arbitrary shapes to the relevant nonsymbolic quantity representations*". I bambini nascono con innate capacità di discriminare tra due quantità (non simboliche; Xu & Spelke, 2000; Xu, Spelke, & Goddard, 2005), e poi tra i 6 e gli 8 anni imparano progressivamente il significato dei simboli numerici arabi, collegando rappresentazioni simboliche a rappresentazioni non simboliche di quantità (Mundy & Gilmore, 2009).

Diversi studi mostrano infatti una correlazione tra elaborazione di numerosità non simboliche e abilità (attuale e futura) di elaborazione numerica simbolica (Halberda, Mazzocco, & Feigenson, 2008; Libertus, Feigenson e Halberd, 2011, 2013; Starr, Libertus, & Brannon, 2013; Bugden et al., 2016; Merkley & Ansari, 2016; Piazza, 2010; Siegler & Lortie-Forgues, 2014). Tuttavia, alcuni studi (Lyons, Nuerk, & Ansari, 2015; Matejko & Ansari, 2016; Sasanguie, De Smedt, Defever, & Reynvoet, 2012; Vanbinst, Ghesquière, & De Smedt, 2012) mostrano correlazioni deboli o non significative nel confronto di numerosità simboliche e non simboliche, mettendo in discussione l'assunto che l'elaborazione numerica simbolica si basi su quella non simboliche.

Anche l'esame longitudinale dalle abilità numeriche dall'età prescolare alla scuola primaria ha rilevato risultati discordanti: in alcuni studi è riportata un'associazione tra abilità numeriche simboliche e non simboliche (Bonny & Lourenco, 2013; Gilmore et al., 2010; Gray & Reeve, 2014; Libertus et al., 2013; Mazzocco et al., 2011b; Starr et al., 2013), in altri studi questa evidenza non è stata dimostrata (Bartelet et al., 2014; Fuhs & McNeil, 2013; Kolkman et al., 2013; Sasanguie, Defever, Maertens, & Reynvoet, 2014; Toll & Van Luit, 2014). Questi ultimi sostengono che i bambini imparano a collegare i simboli numerici del codice simbolico arabo con le grandezze corrispondenti indipendentemente dalla (pregressa) capacità di elaborazione della grandezza numerica non simbolica.

Alcuni studi hanno esaminato le traiettorie di sviluppo della capacità di elaborazione numerica simbolica e non simbolica. Matejko & Ansari (2016) le hanno esaminate longitudinalmente durante il primo anno di scuola primaria, rilevando traiettorie di sviluppo simili durante i primi 6 mesi di scuola primaria e differenti successivamente, con un'acquisizione più rapida delle abilità simboliche rispetto alle non simboliche. Inoltre, questo studio evidenzia che anche le competenze simboliche favoriscono il miglioramento dell'elaborazione non simbolica.

Kuzmina et al. (2020) hanno studiato longitudinalmente studenti dalla prima alla quarta primaria in Russia e Kirghizistan (con quattro rilevazioni, una ogni anno) . I risultati emersi hanno evidenziato che l'accuratezza della rappresentazione simbolica è cresciuta più velocemente ed è migliorata in modo più significativo nel corso degli anni rispetto quella non simbolica. Ciò può essere in parte spiegato dall'acquisizione intensiva della conoscenza dei numeri simbolici nella scuola elementare. Infatti, l'insegnamento nelle scuole elementari in Russia e Kirghizistan si concentra maggiormente sullo sviluppo della conoscenza dei numeri simbolici. Allo stesso tempo, lo sviluppo della rappresentazione della grandezza non simbolica non è stato l'obiettivo dell'istruzione nella scuola elementare sia in Russia che in Kirghizistan. Gli insegnanti usano raramente abilità non simboliche o compiti che richiedono l'applicazione di abilità non simboliche da parte degli studenti. Inoltre, nello stesso studio è emerso che l'intelligenza fluida, la memoria di lavoro visuospaziale e la velocità di elaborazione erano fortemente correlate ai miglioramenti nella rappresentazione della grandezza non simbolica.

Inoltre, l'associazione tra le abilità non simboliche e simboliche si indebolisce con lo sviluppo. Nei bambini, l'abilità simbolica si costruisce inizialmente mappando i simboli numerici su rappresentazioni approssimative di grandezze non simboliche. Con il tempo, però, si sviluppa una maggiore competenza nell'uso delle frazioni simboliche, separando queste abilità da quelle non simboliche (Lv et al., 2023). Allo stesso modo, nell'intento di valutare di valutare il modo in cui la rappresentazione numerica non simbolica predice lo sviluppo delle competenze matematiche nei bambini, uno studio di Liang et al. (2023) ha esaminato se le abilità di mappatura numerica, come la comprensione della cardinalità (il numero di elementi in un insieme) e dell'ordinalità (la posizione di un numero in una sequenza), mediano questo rapporto nel tempo. Dai risultati è emerso che per i bambini di 3 anni, la conoscenza cardinale ha predetto l'aumento delle competenze matematiche, mentre per quei bambini di 4 anni, sono state le abilità ordinali a predire lo sviluppo matematico. A fronte di questi risultati, sarebbe il caso di effettuare ulteriori studi longitudinali per esaminare questi aspetti, anche in funzione del metodo di insegnamento utilizzato.

Abilità numeriche e competenze aritmetiche

Le conoscenze matematiche sono organizzate gerarchicamente, per cui abilità numeriche apprese in precedenza servono per acquisire e consolidare competenze matematiche più avanzate. Bambini in grado di affermare rapidamente e con precisione il più grande di due numeri, tendono a dimostrare anche ottime prestazioni in compiti matematici più avanzati, come aritmetica (Nosworthy, Bugden, Archibald, Evans, & Ansari, 2013), problemi (Fuchs et al., 2010), frazioni (Mou et al., 2016) e geometria (Lourenco & Bonny, 2017). Ad esempio, Vanbinst, Ceulemans, Peters, Ghesquière & De Smedt (2017) studiando longitudinalmente lo sviluppo delle abilità numeriche simboliche nel corso dei primi 3 anni della scuola primaria, ha rilevato 3 differenti tipologie di bambini (gli imprecisi, gli accurati ma lenti e gli accurati e veloci), le quali rilevano anche differenze notevoli e stabili nel recupero dei fatti aritmetici (intesi come risultati di calcoli archiviati nella memoria a lungo termine dalla quale possono essere direttamente richiamati in modo rapido senza ricorrere a procedure di calcolo o conteggio, ad esempio le tabelline o il risultato di semplici operazioni come 5+5, 7+3, etc.) replicando l'associazione tra l'elaborazione della grandezza numerica simbolica e l'aritmetica (Dowker, 2005; Gilmore et al., 2014; Jordan et al., 2009; Price & Fuchs, 2016).

Mentre gli studi tendono in modo sistematico a rilevare che le abilità numeriche simboliche siano associate al successo nelle abilità di calcolo (De Smedt et al., 2013), nel caso di confronto di quantità non simboliche, la relazione con le abilità aritmetiche è stata riscontrata in alcuni studi (Halberda, Mazzocco, & Feigenson, 2008; Libertus, Feigenson, & Halberda, 2011; Mazzocco, Feigenson, & Halberda, 2011; Piazza et al., 2010), ma non in altri

(Holloway & Ansari, 2009; Mundy & Gilmore, 2009; Sasanguie, Van den Bussche e Reynvoet, 2012; De Smedt & Gilmore, 2011; Iuculano, Tang, Hall, & Butterworth, 2008; Rousselle & Noël, 2007). In altri studi l'associazione tra le prestazioni nella discriminazione di quantità non simboliche e le competenze aritmetiche svanisce dopo che si controlla l'influenza di altre variabili come la memoria di lavoro, le abilità spaziali, il vocabolario, e capacità di confronto simbolico (Nosworthy et al., 2013). Queste differenze nei risultati potrebbero dipendere da differenze nel paradigma sperimentale utilizzato nei vari studi, come il mancato controllo di caratteristiche che covariano con le informazioni sulla numerosità (ad esempio, la dimensione dei punti, le caratteristiche visive dei punti), la durata di presentazione degli stimoli o la misura di prestazione utilizzata (si veda De Smedt et al., 2013 per una review).

De Smedt et al. (2013) ha esaminato 25 diversi studi e ha rilevato che solo una minoranza (44%, in particolare in 7 studi con bambini su 18 e 4 studi con adulti su 7) rileva una relazione statisticamente significativa tra il confronto di numerosità non simboliche e prestazioni matematiche. Ciò dipende probabilmente dalla piccola dimensione dell'effetto. Tre metaanalisi separate giungono tutte a una conclusione simile: la capacità di elaborazione di numerosità non simboliche è un predittore statisticamente significativo, ma piccolo, delle differenze individuali nelle prestazioni in matematica ($r = 0.24$ su 195 effect size; Schneider et al., 2017; Fazio, Bailey, Thompson e Siegler, 2014). La metanalisi di Chen & Li (2014) rileva una r media di circa 0.20 per studi trasversali e 0.17 per studi longitudinali. In uno studio con più di 10.000 adulti è stata riportata una relazione di $r = 0.21$ (Halberda et al., 2012). L'elaborazione non simbolica, anche se in modo debole, contribuisce all'apprendimento della matematica dei bambini. Tuttavia, questa relazione è ridotta notevolmente se si controlla per l'abilità di elaborazione numerica simbolica (Bartelet, Vaessen, Blomert, & Ansari, 2014; Brankaer, Ghesquière, & De Smedt, 2014; Fazio, Bailey, Thompson, & Siegler, 2014; Fuhs & McNeil, 2013; Holloway & Ansari, 2009; Kolkman, Kroesbergen, & Leseman, 2013; Lyons, Price, Vaessen, Blomert, & Ansari, 2014; Lyons & Beilock, 2011; Toll & Van Luit, 2014; vanMarle et al., 2014; per una review si veda Lyons et al., 2014).

La ricerca sulla relazione tra capacità di confronto simbolico e abilità matematiche presenta un quadro molto più chiaro. Nel 76% degli studi riportati nella rassegna di De Smedt et al. (2013), le capacità di confronto di numerosità simboliche è associato all'apprendimento delle abilità aritmetiche. L'abilità di elaborare numerosità simboliche resta un predittore significativo dell'abilità aritmetica, anche al netto di quelle non simboliche (Lyons et al., 2014), indicando che le abilità simboliche sono più direttamente implicate nelle competenze matematiche rispetto a quelle non simboliche. La metaanalisi di Schneider et al. (2017) rivela una correlazione tra abilità di confronto simbolico e competenza matematica di $r = 0.30$ (mentre con le abilità non simboliche è di 0.24). Il potere predittivo della capacità di discriminare numerosità simboliche sulle prestazioni in matematica è stato dimostrato anche longitudinalmente (Bartelet, Vaessen, Blomert, & Ansar, 2014; Matejko & Ansari, 2016; Vanbinst, Ceulemans, Peters, Ghesquière, & De Smedt, 2018; Xenidou-Dervou, Molenaar, Ansari, van der Schoot, & van Lieshout, 2017). Ad esempio, il confronto di numerosità simbolica nella scuola dell'infanzia è predittivo del rendimento in matematica nelle classi prime e seconde della primaria, anche al netto delle differenze individuali nel QI e nella memoria di lavoro (Xenidou-Dervou et al., 2017).

Le abilità numeriche possono facilitare lo svolgimento dei calcoli aritmetici in diversi modi. Buone competenze numeriche possono aiutare a ridurre il range dei risultati possibili nella soluzione di problemi aritmetici, in quanto i bambini potrebbero verificare la plausibilità delle loro risposte sulla base della grandezza dei numeri (Booth & Siegler, 2008). Inoltre, le competenze numeriche potrebbero aiutare anche la soluzione vera e propria dei problemi aritmetici. All'inizio, i bambini usano il conteggio per risolvere piccole addizioni e sottrazioni e queste strategie a volte vengono eseguite con supporti aggiuntivi, come le dita. Attraverso l'uso ripetuto del conteggio, i bambini memorizzano i fatti aritmetici (risultati di semplici calcoli ad esempio, 2+3 =5) nella loro memoria a lungo termine (Siegler & Shrager, 1984), i quali permettono di risolvere problemi aritmetici semplici in modo rapido senza ricorrere al conteggio (Bailey, Littlefield & Geary, 2012; Marinelli et al., 2021; 2024). Un deficit nell'elaborazione della grandezza simbolica potrebbe indurre un ritardo nel passaggio dalla fase del *counting-all* (conteggio totale) alla fase del *counting-on-from-larger* (conteggio a partire dal numero maggiore),

Più nello specifico, le due strategie appena citate vengono utilizzate dai bambini per la risoluzione di semplici problemi di addizione. Sono fasi che riflettono lo sviluppo delle loro capacità di calcolo e comprensione dei numeri. La strategia *counting all* è utilizzata principalmente dai bambini più piccoli o da coloro che stanno appena iniziando ad imparare l'addizione. In questa fase, il bambino conta tutti gli oggetti o i numeri coinvolti nell'operazione, partendo da zero. Ad esempio, per calcolare 3 + 2, il bambino conta tutti gli oggetti uno per uno: "1, 2, 3" per rappresentare il primo gruppo (3) e poi continua "4, 5" per rappresentare il secondo gruppo (2). Alla fine, conta quanti sono in totale, ovvero 5. Diversamente, la strategia *counting-on-from-larger* è una strategia più avanzata rispetto al *counting-all* ed è tipica di bambini che hanno sviluppato una maggiore comprensione dei numeri e delle operazioni. In questa fase, infatti, invece di contare tutti i numeri dall'inizio, il bambino inizia a contare dal numero più grande e aggiunge solo l'altro numero. Ad esempio, per calcolare 3 + 2, il bambino identifica il numero più grande, 3, e poi, in modo parsimonioso, conta avanti per due unità: "4, 5". La somma è 5. Dunque, la prima è una strategia più semplice, utilizzata nelle prime fasi di apprendimento, mentre la seconda è più rapida, strategica ed efficiente che però presuppone e una maggiore competenza numerica. Poiché quest'ultima strategia richiede la capacità di riconoscere qual è il numero arabo più grande (Geary et al., 1992) e, pertanto, l'accesso al significato numerico dei simboli arabi, un deficit nell'elaborazione di numerosità potrebbe rallentare o compromettere anche il passaggio a questa strategia avanzata di conteggio.

Il ritardo nel passaggio dalla fase del *counting-all* alla fase del *counting-on-from-larger* può altresì comportare difficoltà ad acquisire i fatti aritmetici, che, a sua volta, ostacola l'acquisizione di strategie avanzate ed efficienti di risoluzione dei calcoli (Jordan et al., 2003; Geary et al., 2004).

Ci sono grandi differenze individuali nell'acquisizione e nell'uso delle strategie basate sul recupero dei fatti aritmetici (Dowker, 2005) e queste potrebbero anche in parte dipendere da differenze nelle capacità di elaborazione numerica dei bambini. Infatti, la capacità di discriminare cifre arabe (ma non le configurazioni non simboliche di punti) è associata a differenze individuali nella soluzione di calcoli aritmetici a una cifra mediante il ricorso ai fatti aritmetici (Vanbinst, Ghesquière e De Smedt, 2012), anche al netto delle differenze individuali nella memoria di lavoro verbale, memoria a breve termine visuo-spaziale e velocità di elaborazione (Vanbinst, Ghesquière, De Smedt, 2015). Inoltre, i fatti aritmetici sono immagazzinati nella memoria a lungo termine in funzione della loro grandezza (Butterworth, Zorzi, Girelli, & Jonckheere, 2001) e, pertanto, è più complesso memorizzare e richiamare dalla memoria numeri per i quali non si accede alla rappresentazione di numerosità (Robinson, Menchetti, & Torgesen, 2002). Inoltre, i fatti aritmetici possono essere usati nelle strategie procedurali per scomporre i problemi aritmetici in calcoli più piccoli e semplici, come la trasformazione o la decomposizione (ad esempio 7 + 5 = ?, 7 + 3 = 10 + 2 = 12). Durante lo sviluppo, c'è progressivamente un minor uso delle strategie procedurali (faticose, dispendiose in termini di tempo e soggette a errori) ed un maggior recupero dei fatti aritmetici (con prestazioni meno dispendiose e più veloci e accurate; Geary et al., 2004; Jordan et al., 2003; Siegler, 1996). D'altronde un deficit nel passaggio dall'applicazione di procedure seriali (basate sul calcolo o sul conteggio) a un recupero dalla memoria della traccia mnestica (fatti aritmetici) è stata ipotizzata essere il *core* del deficit nella discalculia e responsabile della comorbilità con gli altri disturbi di apprendimento come la dislessia e disortografia (caratterizzati dal persistere nell'applicazione delle procedure sublessicali seriali piuttosto che del recupero olistico delle rappresentazioni ortografiche dal lessico ortografico) (Zoccolotti et al., 2020a, b; Marinelli et al., 2021). Pertanto, un deficit nell'acquisizione di *instances* (intese come unità mnestiche) potrebbe essere alla base della mancata automatizzazione (Marinelli et al., 2021) e della comorbilità nei disturbi di apprendimento (Marinelli et al., 2021; 2024; Zoccolotti et al., 2020a, 2020b, 2021a, 2021b).

Alla luce di questa trattazione è evidente che le abilità numeriche e le competenze aritmetiche sono strettamente interconnesse, poiché le prime forniscono la base per lo sviluppo delle seconde. Abilità numeriche solidenon solo facilitano l'apprendimento delle operazioni aritmetiche di base, ma contribuiscono anche al consolidamento di competenze più avanzate, come la risoluzione di problemi complessi e la comprensione delle frazioni e della geometria.

Subitizing

Un'abilità numerica molto importante per l'acquisizione delle abilità aritmetiche è il *subitizing*, ossia la capacità di percepire in modo automatico, accurato e rapido la numerosità di insiemi di piccole quantità non simboliche (Desoete et al., 2009). Gli individui hanno un sistema di individuazione e tracciamento di oggetti multipli (*Object Tracking System*-OTS) che permette il *subitizing*. Dato che l'OTS permette di mantenere e monitorare nello spazio e nel tempo gli oggetti di un insieme come entità separate, ha capacità limitata (ossia massimo quattro elementi). Il *subitizing* è la capacità di discriminare piccole serie di 1-4 oggetti "a colpo d'occhio" in modo automatico (Mandler & Shebo, 1982). Grazie al *subitizing*, i bambini possono selezionare un set di oggetti e trattarli come una singola unità (Feigenson & Halberda, 2004).

Il *subitizing* si sviluppa rapidamente durante il primo anno di vita (Ross-Sheehy, 2003; Rose, Feldman e Jankowski, 2001). Gli studi *cross-sectional* concordano nel riportare correlazioni significative e robuste tra *subitizing* e competenze aritmetiche sia in bambini a sviluppo tipico che con discalculia (Koontz and Berch, 1996; Schleifer & Landerl, 2010; Butterworth, 1999; Landerl, Bevan, & Butterworth, 2004). L'abilità di *subitizing* alla scuola dell'infanzia è un predittore delle abilità aritmetiche, di numerazione e calcolo due anni dopo (LeFevre et al., 2010) o per tutto il corso della scuola primaria (Reeve, Reynolds, Humberstone, & Butterworth, 2012; Reigosa-Crespo et al., 2013). Pertanto, il *subitizing* si sviluppa rapidamente durante il primo anno di vita e risulta essere un indicatore robusto delle competenze aritmetiche future sia nei bambini con sviluppo tipico sia in quelli con discalculia. Questi ultimi – come si descriverà più dettagliatamente nel paragrafo seguente – non evidenziano deficit nel *subitizing* di piccole quantità nonostante le difficoltà nella stima di grandi quantità (Decarli et al., 2020). Questo suggerisce che il sistema OTS, responsabile del *subitizing*, sia intatto, mentre il sistema ANS (*Approximate Number System*), che governa la stima di quantità più grandi, risulti compromesso.

Evidenze sulla discalculia evolutiva

La discalculia evolutiva è una difficoltà nelle abilità matematiche riportata da bambini con abilità intellettive nella norma e adeguata stimolazione e scolarizzazione. In questi casi l'apprendimento e l'automatizzazione delle capacità di elaborazione numerica e di calcolo possono essere faticosi, dispendiose e inclini ad errori. La discalculia può derivare da un deficit primario nelle competenze numeriche precoci nel senso del numero (Dehaene, 1997) o nel "modulo numerico" (Butterworth, 1999), con una forte base biologica. La trattazione delle altre fenomenologie di discalculia esulerebbe dagli obiettivi della presente trattazione che riporta una rassegna sulle competenze numeriche e i rispettivi deficit.

Secondo alcuni autori la discalculia evolutiva è una conseguenza di un deficit di base innato nel "modulo numerico" (Butterworth, 1999; Butterworth & Reigosa-Crespo, 2007), che causa un deficit nella capacità di comprendere e rappresentare in modo esatto la numerosità e nel "senso del numero" (Dehaene, 2001; Dehaene, Piazza, Pinel, & Cohen, 2003; Wilson & Dehaene, 2007), un termine che denota la capacità di comprendere, approssimare e manipolare rapidamente quantità numeriche su una linea numerica interna.

Decarli et al. (2020) hanno studiato le prestazioni di bambini con e senza discalculia in compiti che prevedono la stima di grandi quantità e l'enumerazione esatta di piccole quantità (subitizing). I bambini con discalculia mostrano notevoli difficoltà nella stima di grandi quantità, il che suggerisce un deficit dell'ANS. Tuttavia, nonostante le suddette difficoltà, i bambini discalculici non hanno mostrato alcun deficit nella subitizing di piccole quantità (1-3 elementi), indicando che il sistema dell' OTS, responsabile di questa abilità, non è influenzato. Lo studio ha anche rilevato che i bambini con discalculia presentano deficit nella memoria visuo-spaziale a breve termine, sebbene questi non spieghino direttamente le alterazioni dell'ANS. Inoltre, lo studio non ha rilevato alcuna correlazione significativa tra i deficit di ANS e OTS, suggerendo che questi sistemi operano in modo indipendente.

Pertanto, i risultati supportano l'idea che la discalculia sia un disturbo multiforme che colpisce diversi domini cognitivi, in particolare la stima di grandi quantità e l'elaborazione visuo-spaziale, senza compromettere la capacità di *subitizing* piccole quantità. D'altra parte, Rousselle e Noël (2007) ipotizzano che il deficit nell'elaborazione numerica dei discalculici dipenda da un deficit nell'accesso alla rappresentazione del numero a partire dal formato simbolico, piuttosto che nella rappresentazione interna dei numeri in sé.

In modo consistente e persistente è stato riscontrato in letteratura il deficit dei discalculici nel confronto di quantità simboliche (De Smedt & Gilmore, 2011; Landerl & Kölle, 2009; Landerl et al., 2004; Rouselle & Noel, 2007), che rimane stabile nel tempo (Vanbinst, Ghesquière, De Smedt, 2014). Nel confronto di quantità non simboliche (punti), invece, i risultati sono discordanti. Infatti, alcuni studi riportano un deficit nel confronto di quantità non simboliche nei discalculici (Mejias, Mussolin, Rousselle, Grégoire & Noël, 2012; Kucian et al., 2011; Mazzocco et al., 2011; Piazza et al., 2010). Altri studi, invece, riportano prestazioni paragonabili ai bambini a sviluppo tipico per le quantità non simboliche e deficitarie con le quantità simboliche (Iuculano, Tang, Hall, & Butterworth, 2008; Landerl & Kölle, 2009; De Smedt & Gilmore, 2011; Rousselle & Nöel, 2007). Talvolta la differenza nell'elaborazione di numerosità non simboliche tra bambini discalculici e di controllo appare solo più tardi nello sviluppo (De Smedt et al., 2013). Invece il deficit nel *subitizing* nei discalculici è riscontrato sistematicamente in letteratura (Koontz & Berch, 1996; Schleifer & Landerl, 2010; Butterworth, 1999; Landerl et al., 2004).

È da notare che difficoltà nei compiti di confronto simbolico dei bambini con discalculia (De Smedt & Gilmore, 2011; Landerl & Kolle, 2009; Rousselle & Noël, 2007) potrebbero compromettere anche l'acquisizione delle strategie aritmetiche, ad esempio, la facilità del recupero dei fatti aritmetici e la velocità di esecuzione delle strategie di recupero e procedurali (Vanbinst et al., 2012, 2014). Tuttavia, è da precisare che è possibile che ci siano bambini che abbiano una difficoltà specifica ad acquisire i fatti aritmetici o le procedure di calcolo, pur in presenza di discrete abilità numeriche (Temple, 1987; Geary,1993; Geary & Hoard, 2005).

Correlati neuroanatomici

In studi con bambini e adulti, i solchi intraparietali sinistro e destro (IPS) sono implicati nell'elaborazione della grandezza numerica (Ansari, 2008; Nieder & Dehaene, 2009), con una crescente specializzazione della corteccia parietale per l'elaborazione della quantità numerica nel corso dello sviluppo. È da notare che lo stesso substrato neuronale si attiva nell'elaborazione di numerosità simboliche e non simboliche (Diester & Nieder, 2007, 2010; Eger et al., 2009; Fias, Lammertyn, Reynvoet, Dupont, & Orban, 2003; Piazza et al., 2007). L'attivazione dell'IPS di sinistra nei compiti di confronto di numerosità simbolica è correlata a misure standardizzate di aritmetica nei bambini di 8-10 anni (Bugden, Price, McLean, Ansari, 2012).

Lo sviluppo della cognizione numerica inizia presto nella vita, come dimostrato da studi sui neonati. Cantlon et al. (2006) dimostrano che anche i bambini di quattro anni mostrano risposte di imaging funzionale nel lobo parietale quando impegnati in compiti numerici, suggerendo che la base neurale per l'elaborazione numerica è presente fin dalla tenera età. Questo sviluppo precoce è critico, poiché i deficit nell'elaborazione numerica durante l'infanzia possono portare a difficoltà a lungo termine nella matematica, come osservato da Emerson e Cantlon (2014). Inoltre, la relazione tra elaborazione numerica e attenzione è significativa. Wilkey e Price (2018) discutono come l'attenzione alla grandezza numerica sia intrecciata con i processi cognitivi nel giro frontale inferiore, indicando che la capacità di concentrarsi sulle informazioni numeriche è essenziale per un'elaborazione numerica efficace. Questa convergenza tra attenzione e cognizione numerica sottolinea la complessità delle reti neurali coinvolte, poiché più regioni cerebrali devono lavorare in concerto per facilitare il ragionamento matematico. Gli studi di neuroimaging hanno anche rivelato che l'elaborazione dei numeri simbolici, come le cifre e le parole numeriche, coinvolge percorsi neurali distinti rispetto all'elaborazione numerica non simbolica. Bugden et al. (2021) hanno scoperto che, man mano che i bambini crescono, c'è un aumento legato all'età della congruità neurale nel solco intraparietale sinistro per l'elaborazione delle parole numeriche, suggerendo che con l'età e l'esposizione, i bambini sviluppano mappature più automatiche tra le parole numeriche e le loro rappresentazioni numeriche sottostanti. Questa specializzazione è cruciale per lo sviluppo della fluidità e competenza matematica.

Oltre all'IPS, altre regioni cerebrali contribuiscono all'elaborazione numerica. La corteccia prefrontale dorsolaterale è stata implicata in funzioni cognitive di ordine superiore relative alla matematica, come la risoluzione di problemi e il ragionamento. Rickard et al. (2000) hanno trovato un'attivazione bilaterale nella corteccia parietale posteriore e nella corteccia prefrontale dorsolaterale durante i compiti aritmetici, evidenziando la natura collaborativa di queste regioni nell'esecuzione delle operazioni numeriche. Questo suggerisce che l'elaborazione numerica efficace non dipenda esclusivamente da una sola area, ma coinvolga una rete di regioni che supportano diversi aspetti della cognizione numerica. Man mano che i bambini crescono, le loro abilità di elaborazione numerica diventano più sofisticate, passando da un senso numerico approssimato di base a una comprensione simbolica più complessa. Ansari e Dhital (2006) discutono i cambiamenti legati all'età nell'attivazione del solco intraparietale durante l'elaborazione della grandezza non simbolica, suggerendo che, con la crescita, i circuiti neurali dei bambini diventano più abili nel gestire le informazioni numeriche. I dati di neuroimaging nella discalculia evolutiva sono contraddittori. Mentre alcuni studi hanno mostrato nei bambini discalculici un pattern di attivazione atipico della corteccia parietale per l'elaborazione di grandezza numerica non simbolica (Price, Holloway, Rasanen, Vesterinen & Ansari, 2007) e simbolica (Mussolin, DeVolder, Grandin, Schloegel, Nassongne, & Noel, 2010; Mussolin , Mejias, & Noël, 2010; si veda anche Kaufmann, Wood, Rubinsten, & Henik, 2011 per una metanalisi), altri studi non hanno rivelato alcuna differenza nella corteccia parietale durante l'elaborazione numerica non simbolica tra i bambini con e senza discalculia, mostrando invece differenze nelle regioni relative alla difficoltà del compito (Kucian, Loenneker, Martin & vonAster, 2011). Il deficit di *subitizing* sembra essere associata, invece, ad una riduzione della materia grigia della giunzione temporale parietale posteriore destra dell'rTPJ (giunzione temporale parietale posteriore destra; Rykhlevskaia, Uddin, Kondos, & Menon, 2009).

Training delle abilità numeriche

Sono stati condotti alcuni studi sull'efficacia dei training per lo sviluppo della rappresentazione numerica. Le attività proposte sono state integrate in programmi di scuola materna per bambini a basso reddito (Dyson, Jordan & Glutting, 2013; Griffin, 2004) e a rischio di discalculia (Toll & van Luit, 2013). Pochi studi si sono concentrati su bambini più grandi o bambini con discalculia. I training comprendevano numerose attività numeriche (riconoscimento dei numeri, conteggio, confronto di insiemi, giochi da tavolo, ecc.) per il potenziamento delle abilità numeriche sia simboliche che non simboliche. Questi studi, pertanto, non permettono di verificare quale dei due tipi di potenziamento migliora maggiormente l'elaborazione di quantità numeriche, eccetto pochissime eccezioni. Gli effetti del training sono stati osservati principalmente sulle abilità simboliche, e solo marginalmente sull'elaborazione non simbolica di numerosità. La metanalisi di Schneider et al. (2017) evidenzia che il target degli strumenti di intervento e screening diagnostico per bambini in età scolare a rischio di difficoltà matematiche è l'elaborazione della grandezza simbolica, mentre prima dell'acquisizione delle conoscenze simboliche sarebbe il caso di targettizzate lo screening e il training sull'elaborazione di numerosità non simboliche. Honoré e Noël (2016) hanno confrontato i miglioramenti con le abilità aritmetiche in prescolari dopo un training delle abilità di numerosità simbolica e non simbolica, riscontrando miglioramenti maggiori nei primi. Inoltre, il training delle abilità simboliche migliora le abilità non simboliche, ma non viceversa.

Gli effetti del potenziamento si generalizzano anche ad altre abilità matematiche non trattate, come l'aritmetica (Ramani & Siegler, 2011; Siegler & Ramani, 2009) e il rendimento in matematica (Obersteiner, Reiss, & Ufer, 2013; Rasanen, Salminen, Wilson, Aunio & Dehaene, 2009), confermando che l'elaborazione numerica è implicata nell'acquisizione di abilità aritmetiche. Vilette, Mawart & Rusinek (2010) ha rilevato che un training computerizzato sul sistema simbolico dei numeri produce miglioramenti nel calcolo addirittura più di un gioco appositamente sviluppato per potenziare le abilità di calcolo.

Alcuni studi hanno esaminato l'efficacia del potenziamento delle abilità di calcolo non simbolico. Hyde, Khanum e Spelke (2014) hanno riscontrato che un training di addizione con quantità non simboliche (matrici di punti) nella classe prima della primaria comporta una maggiore precisione e velocità nello svolgere addizioni con numeri rispetto ai bambini che hanno svolto compiti non numerici, indice della possibilità di migliorare le competenze aritmetiche in seguito ad un training con quantità non simboliche. Un training sul calcolo approssimativo con numerosità non simboliche negli individui migliora anche le addizioni e sottrazioni simboliche a 2 e 3 cifre (Park e Brannon, 2013, 2014). Tuttavia, gli effetti di generalizzazione su abilità non trattate (ad esempio, conteggio verbale e confronto tra numeri) non sono stati riscontrati in alcuni studi in cui il training consisteva nel confronto di quantità non simboliche (punti) (Räsänen, Salminen, Wilson, Aunio & Dehaene, 2009; Wilson, Dehaene, Dubois & Fayol, 2009; Dewind & Brannon, 2012; Park & Brannon, 2014; Wilson, Revkin, Cohen, Cohen & Dehaene, 2006). È possibile che le abilità aritmetiche simboliche migliorino dopo un training non simbolico, solo se è richiesta la manipolazione di quantità non simboliche in un esplicito contesto aritmetico e non semplicemente dopo training finalizzati a migliorare la precisione nella stima di quantità non simboliche (Lyons & Ansari, 2015; Park & Brannon, 2014).

Alcuni studi hanno dimostrato l'efficacia di training computerizzati in bambini con discalculia nel migliorare la capacità di elaborazione della numerosità (Wilson, Revkin, Cohen, Cohen & Dehaene, 2006; Kucian, Loenneker, Martin & vonAster, 2011). Tuttavia, questi studi non prevedevano un gruppo di controllo non trattato, per poter escludere che i miglioramenti dipendano dalla maturazione o dall'apprendimento del test (ripetuto nel pre- e post- training).

Allo stesso modo è molto importante utilizzare training basati su attività ludiche, come ad esempio giochi da tavola con i numeri, che possono migliorare le abilità numeriche (simboliche, non simboliche e la linea mentale dei numeri) e aritmetiche (Ramani, Siegler & Hitti, 2012; Ramani & Siegler, 2008; Siegler & Ramani, 2008).

La didattica curriculare in Italia e il metodo analogico di Bortolato

La didattica tradizionale della matematica in Italia prevede come obiettivi iniziali dell'insegnamento il consolidarsi delle conoscenze simboliche, per permettere la lettura e la scrittura di numeri, comprendere le proprietà aritmetiche e raggiungere l'automatizzazione che agevolerà lo sviluppo delle abilità di calcolo a mente e scritto (Girelli & Melogno, 2020). Nella classe prima della primaria i programmi curricolari tradizionali enfatizzano l'uso del sistema simbolico, cercano di consolidare la linea mentale dei numeri lavorando sulla linea del 10 (e negli ultimi mesi del 20) e i processi di transcodifica dei numeri mediante il sistema simbolico. Sono inoltre presentati ai bambini "gli amici del 10" (3 + 7 = 10; 5 + 5 = 10, ecc.), in modo da favorire l'acquisizione dei primi fatti aritmetici.

Il metodo analogico proposto in Italia dal maestro Bortolato (per un approfondimento si veda Bortolato, 2011, 2023), si propone di insegnare le abilità numeriche potenziando principalmente l'elaborazione numerica non simbolica: le attività sono basate su immagini di configurazioni di punti, i quali sono clusterizzati in set da 5, 10, 50 e 100, in modo da favorire il riconoscimento della configurazione visiva (ed evitare il conteggio seriale). Nel metodo Bortolato non ci si limita nelle prime fasi a lavorare sulla linea del 10 e poi del 20, ma si presentano anche numerosità maggiori sin dalle prime fasi. Infine, nel metodo Bortolato si cerca di favorire lo svolgimento di operazioni con le quantità sin da subito. Vengono forniti anche dei dispositivi che simulando il funzionamento delle mani e possono essere di supporto nell'apprendimento del calcolo mentale. Per il recupero dei fatti aritmetici vengono invece forniti degli strumenti che aiutano il bambino a recuperare tramite un dispositivo dal carattere ludico ed immediato alcuni fatti aritmetici.

Benché non ci siano in letteratura evidenze sperimentali dell'efficacia del metodo Bortolato per l'apprendimento del sistema numerico e delle competenze aritmetiche, questa modalità didattica offre alcuni spunti interessanti che richiederebbero una verifica sperimentale. In primis il metodo analogico, non essendo basato sui rapporti astratti e convenzionali tra etichetta verbale e quantità, ma su una rappresentazione analogica concreta (come le dita o un insieme di oggetti) permette una comprensione più immediata del concetto di quantità e della possibilità di svolgere semplici calcoli. Non ci sono prove sistematiche del vantaggio dell'uso di dispositivi analogici, ma è intuibile che un insegnamento di questo tipo possa facilitare l'apprendimento della matematica in studenti con disabilità o con difficoltà nell'apprendimento delle rappresentazioni simboliche dei numeri (Romano, Bruno, Milano, Nardacchione, Marinelli, in press). La presentazione di pallini clusterizzate su base 5, inoltre, potrebbe favorire il riconoscimento automatico "a colpo d'occhio" tipico del *subitizing*. Inoltre, la presentazione sin dalle prime fasi dei numeri da 0 a 100, potrebbe favorire un più precoce passaggio da un rapporto logaritmico a lineare nella linea mentale dei numeri (generalmente con la didattica tradizionale avviene solo nella classe seconda della primaria, Geary et al., 2007; Siegler & Booth, 2004). Poiché un più precoce passaggio ad trend lineare comporta migliori abilità aritmetiche (Ashcraft & Moore, 2012; Gunderson, Ramirez, Beilock & Levine, 2012), è probabile che ci siano benefici anche per le competenze aritmetiche. Sono necessarie ricerche empiriche per verificare queste ipotesi. Inoltre, sarebbe interessante studiare le traiettorie di sviluppo delle competenze numeriche simboliche e non simboliche in bambini esposti alla didattica tradizionale VS al metodo analogico, in modo da verificarne l'efficacia sia nell'acquisizione delle abilità numeriche ma anche aritmetiche e l'acquisizione dei fatti aritmetici. Infatti, mentre la pratica con numerosità simboliche permette migliori abilità aritmetiche (De Smedt et al., 2013), i risultati sono meno ovvi nel caso di programmi basati su abilità numeriche non simboliche. Benchè ci siano numerose evidenze che le rappresentazioni numeriche e le competenze aritmetiche migliorino maggiormente se il bambino è impegnato in attività di discriminazione di quantità simboliche che non simboliche, è stato dimostrato (Hyde et al. 2014; Park & Brannon, 2013, 2014) che il coinvolgimento dei bambini in calcoli con quantità non simboliche migliori anche le abilità aritmetiche simboliche.

Conclusioni

Nel presente lavoro si è esaminato lo sviluppo delle abilità numeriche simboliche e non simboliche nei bambini, evidenziando l'importanza di entrambe per l'acquisizione di competenze aritmetiche. Le evidenze emerse suggeriscono l'importanza di valutare le capacità di elaborare numerosità per rilevare bambini a rischio di sviluppare deficit nel recupero di fatti aritmetici o nelle strategie di calcolo (Nosworthy, Bugden, Archibald, Evans, & Ansar, 2013). sono stati condotti pochi studi longitudinali sui trend di sviluppo delle abilità numeriche simboliche e non simboliche e sull'impatto sulle abilità aritmetiche. Una maggiore comprensione dello sviluppo della capacità di elaborare numerosità simboliche e non simboliche è fondamentale per predisporre interventi educativi più efficaci per il miglioramento della capacità di elaborazione numerica e l'apprendimento matematico avanzato (De Smedt et al., 2013; Feigenson et al., 2013). L'uso del metodo analogico, che si focalizza su rappresentazioni non simboliche, potrebbe offrire vantaggi significativi per alcuni gruppi di studenti, specialmente quelli con difficoltà di apprendimento. Tuttavia, non vi sono ancora sufficienti evidenze sperimentali sull'efficacia del metodo analogico di Bortolato, per legittimarne l'adozione. Studi futuri di tipo longitudinale dovrebbero confrontare longitudinalmente il trend si sviluppo delle abilità numeriche e delle competenze matematiche in funzione del tipo di insegnamento ricevuto, confrontando il training basato sulle quantità non simboliche (e.g., metodo analogico di Bortolato) e su quelle simboliche (didattica tradizionale curriculare), per valutare quale intervento favorisce una migliore acquisizione.

Dato che le rappresentazioni simboliche e non simboliche vengono processate in modo diverso, ulteriori ricerche potrebbero indagare in modo più dettagliato le implicazioni di queste differenze per l'apprendimento della matematica. Questo potrebbe includere esperimenti neurocognitivi o comportamentali per capire come migliorare l'insegnamento in base alle modalità con cui gli studenti elaborano diversi tipi di rappresentazioni numeriche. Si potrebbero, inoltre, progettare interventi didattici mirati che utilizzino sia rappresentazioni simboliche che non simboliche per insegnare concetti matematici specifici, e poi valutare quale tipo di rappresentazione risulta più efficace in determinati contesti e in funzione delle competenze/difficoltà del bambino. Ad esempio, l'introduzione di concetti astratti (come l'addizione) potrebbe essere più intuitiva usando rappresentazioni non simboliche prima di passare alla rappresentazione simbolica. Studi sperimentali potrebbero misurare il trasferimento di conoscenze tra questi due tipi di rappresentazioni.

Riferimenti bibliografici

Antell, S. E., & Keating, D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child development*, 695-701. DOI: 10.2307/1130057.

Ansari, D., & Dhital, B. (2006). Age-related changes in the activation of the intraparietal sulcus during nonsymbolic magnitude processing: an event-related functional magnetic resonance imaging study. *Journal of Cognitive Neuroscience, 18*(11), 1820-1828. DOI: 10.1162/jocn.2006.18.11.1820.

Ansari, D. (2008). Effects of development and enculturation on number representation in the brain. *Nature reviews neuroscience*, *9*(4), 278-291. DOI: 10.1038/nrn2334 .

Ashcraft, M. H., & Moore, A. M. (2012). Cognitive processes of numerical estimation in children. *Journal of experimental child psychology*, *111*(2), 246-267. DOI: 10.1016/j.jecp.2011.08.005.

Bailey, D. H., Littlefield, A., & Geary, D. C. (2012). The codevelopment of skill at and preference for use of retrieval-based processes for solving addition problems: Individual and sex differences from first to sixth grades. *Journal of Experimental Child Psychology*, *113*(1), 78-92. DOI: 10.1016/j.jecp.2012.04.014.

Bailey, D. H., Siegler, R. S., & Geary, D. C. (2014). Early predictors of middle school fraction knowledge. *Developmental science*, *17*(5), 775-785. DOI: 10.1111/desc.12155.

Banks, W. P., Fujii, M., & Kayra-Stuart, F. (1976). Semantic congruity effects in comparative judgments of magnitudes of digits. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *2*(3), 435. DOI: 10.1037/0096-1523.2.3.435.

Bartelet, D., Vaessen, A., Blomert, L., & Ansari, D. (2014). What basic number processing measures in kindergarten explain unique variability in first-grade arithmetic proficiency?. *Journal of experimental child psychology*, *117*, 12-28. DOI: 10.1016/j.jecp.2013.08.010.

Basten, M., Jaekel, J., Johnson, S., Gilmore, C., & Wolke, D. (2015). Preterm birth and adult wealth: mathematics skills count. *Psychological science*, *26*(10), 1608-1619. DOI: 10.1177/0956797615596230.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of learning disabilities*, *38*(4), 333-339. DOI: 10.1177/00222194050380040901.

Berteletti, I., Lucangeli, D., Piazza, M., Dehaene, S., & Zorzi, M. (2010). Numerical estimation in preschoolers. *Developmental Psychology*, *41*, 545-551. DOI: 10.1037/a0017887.

Bonny, J. W., & Lourenco, S. F. (2013). The approximate number system and its relation to early math achievement: Evidence from the preschool years. *Journal of experimental child psychology*, *114*(3), 375-388. DOI: 10.1016/j.jecp.2012.09.015.

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental psychology*, *42*(1), 189. DOI: 10.1037/0012-1649.41.6.189.

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child development*, *79*(4), 1016-1031. DOI: 10.1111/j.1467-8624.2008.01173.x.

Bortolato, C. (2023). *La via del metodo analogico. Teoria per l'apprendimento intui- tivo della matematica, Metodo Analogico*. Trento: Edizioni Centro Studi Erickson S.p.A.

Bortolato, C. (2011). *La linea del 20. Metodo analogico per l'apprendimento del cal- colo, Metodo Analogico Bortolato.* Trento: Edizioni Centro Studi Erickson S.p.A.

Brankaer, C., Ghesquiere, P., & Smedt, B.D. (2014). Children's mapping between non-symbolic and symbolic numerical magnitudes and its association with timed and untimed tests of mathematics achievement. *PLOS ONE*, *9* (4). DOI: 10.1371/journal.pone.0093565.

Bugden, S., Price, G. R., McLean, D. A., & Ansari, D. (2012). The role of the left intraparietal sulcus in the relationship between symbolic number processing and children's arithmetic competence. *Developmental cognitive neuroscience*, *2*(4), 448-457. DOI: 10.1016/j.dcn.2012.04.001.

Bugden, S., DeWind, N. K., & Brannon, E. M. (2016). Using cognitive training studies to unravel the mechanisms by which the approximate number system supports symbolic math ability. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, *10,* 73-80. DOI: 10.1016/j.cobeha.2016.05.002.

Bugden, S., Park, A., Mackey, A., & Brannon, E. (2021). The neural basis of number word processing in children and adults. *Developmental Cognitive Neuroscience*, *51*, 101011. DOI: 10.1016/j.dcn.2021.101011

Butterworth, B. (1999). A head for figures. *Science*, *284*(5416), 928-929. DOI: 10.1126/science.284.5416.928.

Butterworth, B., Zorzi, M., Girelli, L., & Jonckheere, A. R. (2001). Storage and retrieval of addition facts: The role of number comparison. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology: Section A*, *54*(4), 1005-1029. DOI: 10.1080/713756007.

Butterworth, B. (2005). Developmental dyscalculia. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 455-467). Psychology Press.

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of child psychology and psychiatry*, *46*(1), 3-18. DOI: 10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x.

Butterworth, B., & Reigosa, V. (2007). Information processing deficits in dyscalculia. In D. B. Berch & M. M. M. Mazzocco (Eds.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities* (pp. 65-81). Baltimore, Maryland: Paul H. Brookes Publishing Co,

Butterworth, B. (2010). Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia. *Trends in Cognitive Sciences*, *14*, 534-541. DOI: 10.1016/b978-0-12-385948-8.00016-5.

Butterworth, B., Varma, S., Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: From Brain to Education, *Science*, 332(6033), 1049-53. DOI: 10.1126/science.1201536.
Bynner, J., & Parsons, S. (1997). *Does Numeracy Matter? Evidence from the National Child Development Study on the Impact of Poor Numeracy on Adult Life.* London, England: Basic Skills Agency.
Cantlon, J., Brannon, E., Carter, E., & Pelphrey, K. (2006). Functional imaging of numerical processing in adults and 4-y-old children. *Plos Biology*, *4*(5), e125. DOI: 10.1371/journal.pbio.0040125.
Castro, D., Estévez, N. & Pérez, O. (2009). Typical development of quantity comparison in school-aged children. *The Spanish Journal of Psychology*, *14*, 50-61. DOI: 10.5209/rev_SJOP.2011.v14.n1.4.
Castro, D., Reigosa-Crespo, V., & González, E. (2012). Non-symbolic and symbolic numerical magnitude processing in children with developmental dyscalculia. *The Spanish Journal of Psychology, 15,* 952-966. DOI: 10.5209/rev_SJOP.2012.v15.n3.39387.
Chen, Q., & Li, J. (2014). Association between individual differences in nonsymbolic number acuity and math performance: a meta-analysis. *Acta Psychology*, *148*, 163-72. DOI: 10.1016/j.actpsy.2014.01.016.
Cowan, R., & Powell, D. (2014). The contributions of domain-general and numerical factors to third-grade arithmetic skills and mathematical learning disability. *Journal of educational psychology*, *106*(1), 214. DOI: 10.1037/a0034097.
Decarli, G., Paris, E., Tencati, C., Nardelli, C., Vescovi, M., Surian, L., & Piazza, M. (2020). Impaired large numerosity estimation and intact subitizing in developmental dyscalculia. *PLoS One*, *15*(12). DOI: 10.1371/journal.pone.0244578.
De Smedt, B., & Gilmore, C. K. (2011). Defective number module or impaired access? Numerical magnitude processing in first graders with mathematical difficulties. *Journal of experimental child psychology*, *108*(2), 278-292. DOI: 10.1016/j.jecp.2010.09.003.
De Smedt, B., Noël, M. P., Gilmore, C., & Ansari, D. (2013). How do symbolic and non-symbolic numerical magnitude processing skills relate to individual differences in children's mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Trends in Neuroscience and Education*, *2*(2), 48-55. DOI: 10.1016/j.tine.2013.06.001.
Dehaene, S. (1997). *The number sense*. New York: Oxford University Press.
Dehaene, S. (2001). Précis of the number sense. *Mind & language*, *16*(1), 16-36. DOI: 10.1111/1468-0017.00154.
Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, *20*, 487-506. DOI: 10.1080/02643290244000239.
Dehaene, S. (2008). Symbols and quantities in parietal cortex: elements of a mathematical theory of number representation and manipulation. In P. Haggard, Y. Rossetti, & Y.M. Kawato (Eds.), *Attention and Performance Series* XXII (pp. 527-574). New York: Oxford University Press.
Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics* (2nd ed.). OUP USA.

Desoete, A., Roeyers, H., & De Clercq, A. (2004). Children with mathematics learning disabilities in Belgium. *Journal of learning disabilities*, *37*(1), 50-61. DOI: 10.1177/00222194040370010601.

Desoete, A., Stock, P., Schepens, A., Baeyens, D., & Roeyers, H. (2009). Classification, seriation, and counting in grades 1, 2, and 3 as two-year longitudinal predictors for low achieving in numerical facility and arithmetical achievement?. *Journal of Psychoeducational Assessment*, *27*(3), 252-264. DOI: 10.1177/0734282908330588.

DeWind, N. K., & Brannon, E. M. (2012). Malleability of the approximate number system: effects of feedback and training. *Frontiers in human neuroscience*, *6*, 68. DOI: 10.3389/fnhum.2012.00068.

Diester, I., & Nieder, A. (2007). Semantic associations between signs and numerical categories in the prefrontal cortex. *PLoS biology*, *5*(11), e294. DOI: 10.1371/journal.pbio.0050294.

Diester, I., & Nieder, A. (2010). Numerical values leave a semantic imprint on associated signs in monkeys. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *22*(1), 174-183. DOI: 10.1162/jocn.2009.21193.

Dowker, A. (2005). Early identification and intervention for students with mathematics difficulties. *Journal of learning disabilities*, *38*(4), 324-332. DOI: 10.1177/00222194050380040801.

Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., Pagani, L. S., Feinstein, L., Engel, M., Brooks-Gunn, J., Sexton, H., Duckworth, K., & Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental psychology*, *43*(6), 1428-1446. DOI: 10.1037/0012-1649.43.6.1428.

Dyson, N. I., Jordan, N. C., & Glutting, J. (2013). A number sense intervention for low-income kindergartners at risk for mathematics difficulties. *Journal of learning disabilities*, *46*(2), 166-181. DOI: 10.1177/0022219411410233.

Eger, E., Michel, V., Thirion, B., Amadon, A., Dehaene, S., & Kleinschmidt, A. (2009). Deciphering cortical number coding from human brain activity patterns. *Current Biology*, *19*(19), 1608-1615. DOI: 10.1016/j.cub.2009.08.047.

Emerson, R., & Cantlon, J. (2014). Continuity and change in children's longitudinal neural responses to numbers. *Developmental Science, 18*(2), 314-326. DOI: 10.1111/desc.12215.

Fayol, M., Camos, V., & Roussel, J. L. (2000). Acquisition et mise en œuvre de la numération par les enfants de 2 à 9 ans. *Neuropsychologie des troubles du calcul et du traitement des nombres*, 33-58.

Fazio, L. K., Bailey, D. H., Thompson, C. A., & Siegler, R. S. (2014). Relations of different types of numerical magnitude representations to each other and to mathematics achievement. *Journal of experimental child psychology*, *123*, 53-72. DOI: 10.1016/j.jecp.2014.01.013.

Feigenson, L., & Halberda, J. (2004). Infants chunk object arrays into sets of individuals. *Cognition*, *91*(2), 173-190. DOI: 10.1016/j.cognition.2003.09.003.

Feigenson L, Dehaene S, & Spelke E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences*, *8*(30), 7-14. DOI: 10.1016/j.tics.2004.05.002.

Feigenson, L., Libertus, M. E., & Halberda, J. (2013). Links between the intuitive sense of number and formal mathematics ability. *Child development perspectives*, *7*(2), 74-79. DOI: 10.1111/cdep.12019.

Fias, W., Lammertyn, J., Reynvoet, B., Dupont, P., & Orban, G. A. (2003). Parietal representation of symbolic and non symbolic magnitude. *Journal of cognitive neuroscience*, *15*(1), 47-56. DOI: 10.1162/089892903321107819.

Fuchs, L. S., Geary, D. C., Compton, D. L., Fuchs, D., Hamlett, C. L., & Bryant, J. D. (2010). The contributions of numerosity and domain-general abilities to school readiness. *Child Development*, *81*(5), 1520-1533. DOI: 10.1111/j.1467-8624.2010.01489.x.

Fuhs, M. W., & McNeil, N. M. (2013). ANS acuity and mathematics ability in preschoolers from low-income homes: Contributions of inhibitory control. *Developmental science*, *16*(1), 136-148. DOI: 10.1111/desc.12013.

Geary, D. C., Bow-Thomas, C. C., & Yao, Y. H. (1992). Counting knowledge and skill in cognitive addition: A comparison of normal and mathematically disabled children. *Journal of Experimental Child Psychology*, *54*, 372-391. DOI: 10.1016/0022-0965(92)90026-3.

Geary, D. C. (1993). Mathematical disabilities: cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological bulletin*, *114*(2), 345. DOI: 10.1037/0033-2909.114.2.345.

Geary, D.C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *37*(1), 4-15. DOI: 10.1177/00222194040370010201.

Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., & DeSoto, M. C. (2004). Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of experimental child psychology*, *88*(2), 121-151. DOI: 10.1016/j.jecp.2004.03.002.

Geary, D. C., & Hoard, M. K. (2005). Learning disabilities in arithmetic and mathematics: Theoretical and empirical perspectives. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 253-267). Psychology Press.

Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., Nugent, L., & Numtee, C. (2007). Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child development*, *78*(4), 1343-1359. DOI: 10.1111/j.1467-8624.2007.01069.x.

Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Byrd-Craven, J. (2008). Development of number line representations in children with mathematical learning disability. *Developmental neuropsychology*, *33*(3), 277-299. DOI: 10.1080/87565640801982361

Gebuis, T., & Reynvoet, B. (2012). The interplay between nonsymbolic number and its continuous visual properties. *Journal of Experimental Psychology: General*, *141*(4), 642-648. DOI: 10.1037/a0026218.

Gerber, P.J. (2012). The impact of learning disabilities on adulthood: A review of the evidenced-based literature for research and practice in adult education. *Journal of Learning Disabilities*, *45*(1), 31-46. DOI: 10.1177/0022219411426858.

Gersten, R., Jordan, N. C., & Flojo, J. R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of learning disabilities*, *38*(4), 293-304. DOI: 10.1016/j.cognition.2010.02.002.

Gilmore, C.K., McCarthy, S.E., & Spelke, E.S. (2010). Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling. *Cognition*, *115*, 394-406. DOI: 10.1016/j.cognition.2010.02.002.

Gilmore, C., Attridge, N., De Smedt, B., & Inglis, M. (2014). Measuring the approximate number system in children: Exploring the relationships among different tasks. *Learning and Individual Differences*, *29*, 50-58. DOI: 10.1016/j.lindif.2013.10.004.

Girelli, L. & Melogno, S. (2020). Sviluppo e apprendimento delle abilità numeriche: dai meccanismi di quantificazione preverbali alla soluzione dei problemi aritmetici. In P. Zoccolotti (a cura di), *I disturbi specifici di apprendimento. Manuale per la valutazione* (pp. 313-338). Roma: Carocci editore.

Gray, S. A., & Reeve, R. A. (2014). Preschoolers' dot enumeration abilities are markers of their arithmetic competence. *PLoS One*, *9*(4), e94428. DOI: 10.1371/journal.pone.0094428.

Griffin, S. (2004). Building number sense with Number Worlds: A mathematics program for young children. *Early childhood research quarterly*, *19*(1), 173-180. DOI: 10.1016/j.ecresq.2004.01.012.

Gunderson, E. A., Ramirez, G., Beilock, S. L., & Levine, S. C. (2012). The relation between spatial skill and early number knowledge: the role of the linear number line. *Developmental psychology*, *48*(5), 1229. DOI: 10.1037/a0027433.

Halberda, J., Mazzocco, M. M., & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, *455*(7213), 665-668. DOI: 10.1038/nature07246.

Halberda, J., & Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the number sense: the approximate number system 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology, 44*, 1457-1465. DOI: 10.1037/a0012682.

Holloway, I. D., & Ansari, D. (2009). Mapping numerical magnitudes onto symbols: The numerical distance effect and individual differences in children's mathematics achievement. *Journal of experimental child psychology*, *103*(1), 17-29. DOI: 10.1016/j.jecp.2008.04.001.

Halberda, J., Ly, R., Wilmer, J. B., Naiman, D. Q., & Germine, L. (2012). Number sense across the lifespan as revealed by a massive Internet-based sample. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *109*(28), 11116-11120. DOI: 10.1073/pnas.1200196109.

Honoré, N., & Noël, M. P. (2016). Improving preschoolers' arithmetic through number magnitude training: The impact of non-symbolic and symbolic training. *PloS one*, *11*(11), e0166685. DOI: 10.1371/journal.pone.0166685.

Hyde, D. C., Khanum, S., & Spelke, E. S. (2014). Brief non-symbolic, approximate number practice enhances subsequent exact symbolic arithmetic in children. *Cognition*, *131*(1), 92-107. DOI: 10.1016/j.cognition.2013.12.007.

Iuculano, T., Tang, J., Hall, C. W., & Butterworth, B. (2008). Core information processing deficits in developmental dyscalculia and low numeracy. *Developmental science, 11*(5), 669-680. DOI: 10.1111/j.1467-7687.2008.00716.x.

Jordan, N. C., Hanich, L. B., & Kaplan, D. (2003). Arithmetic fact mastery in young children: A longitudinal investigation. *Journal of Experimental Child Psychology*, *85*, 103-119. DOI: 10.1016/s0022-0965(03)00032-8.

Jordan, J. A., Mulhern, G., & Wylie, J. (2009). Individual differences in trajectories of arithmetical development in typically achieving 5- to 7-year-olds. *Journal of Experimental Child Psychology, 103*, 469-479. DOI: 10.1016/j.jecp.2009.01.011.

Kaufmann, L., Wood, G., Rubinsten, O., & Henik, A. (2011). Meta-analyses of developmental fMRI studies investigating typical and atypical trajectories of number processing and calculation. *Developmental neuropsychology, 36*(6), 763-787. DOI: 10.1080/87565641.2010.549884.

Kolkman, M. E., Kroesbergen, E. H., & Leseman, P. P. (2013). Early numerical development and the role of non-symbolic and symbolic skills. *Learning and instruction*, *25*, 95-103. DOI: 10.1016/j.learninstruc.2012.12.001.

Koontz, K. L., & Berch, D. B. (1996). Identifying simple numerical stimuli: processing inefficiencies exhibited by arithmetic learning disabled children. *Mathematical Cognition, 2*(1), 1-23. DOI: 10.1080/135467996387525.

Kucian, K., Loenneker, T., Martin, E., & von Aster, M. (2011). Non-symbolic numerical distance effect in children with and without developmental dyscalculia: a parametric fMRI study. *Developmental neuropsychology*, *36*(6), 741-762. DOI: 10.1080/87565641.2010.549867.

Kuzmina, Y., Tikhomirova, T., Lysenkova, I., & Malykh, S. (2020). Domain-general cognitive functions fully explained growth in nonsymbolic magnitude representation but not in symbolic representation in elementary school children. *PloS one*, *15*(2). DOI: 10.1371/journal.pone.0228960.

Landerl, K., Bevan, A., & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8-9-year-old students. *Cognition*, *93*(2), 99-125. DOI: 10.1016/j.cognition.2003.11.004.

Landerl, K., & Kölle, C. (2009). Typical and atypical development of basic numerical skills in elementary school. *Journal of experimental child psychology*, *103*(4), 546-565. DOI: 10.1016/j.jecp.2008.12.006.

Landerl, K., Fussenegger, B., Moll, K., & Willburger, E. (2009). Dyslexia and dyscalculia: two learning disorders with different cognitive profiles. J*ournal of Experimental Child Psychology, 103*, 309-24. DOI: 10.1016/j.jecp.2009.03.006.

Laski, E. V., & Siegler, R. S. (2007). Is 27 a big number? Correlational and causal connections among numerical categorization, number line estimation, and numerical magnitude comparison. *Child development*, *78*(6), 1723-1743. DOI: 10.1111/j.1467-8624.2007.01087.x.

Leibovich, T., Katzin, N., Harel, M., & Henik, A. (2017). From “sense of number” to “sense of magnitude”: The role of continuous magnitudes in numerical cognition. *Behavioral and Brain Sciences, 40*, e164. DOI: 10.1017/s0140525x16000960.

LeFevre, J. A., Fast, L., Skwarchuk, S. L., Smith-Chant, B. L., Bisanz, J., Kamawar, D., & Penner-Wilger Marcie. (2010). Pathways to mathematics: longitudinal predictors of performance. *Child Development, 81*, 1753-1767. DOI: 10.1111/j.1467-8624.2010.01508.x.

Liang, Y., Zhang, L., Duan, X., Wu, G., & Yan, H. (2023). Longitudinal association between non-symbolic numerical representation and emerging math competence: The dynamic mediation effect from cardinal knowledge to ordinal skills. *Cognitive Development, 66*, 101339. DOI: 10.1016/j.cogdev.2023.101339.

Libertus, M. E., & Brannon, E. M. (2009). Behavioral and neural basis of number sense in infancy. *Current Directions in Psychological Science*, *18*(6), 346-351. DOI: 10.1111/j.1467-8721.2009.01665.x.

Libertus, M. E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011). Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability. *Developmental science*, *14*(6), 1292-1300. DOI: 10.1111/j.1467-7687.2011.01080.x.

Libertus, M. E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2013). Numerical approximation abilities correlate with and predict informal but not formal mathematics abilities. *Journal of Experimental Child Psychology, 116*, 829-838. DOI: 10.1016/j.jecp.2013.08.003.

Lourenco, S. F., & Bonny, J. W. (2017). Representations of numerical and non-numerical magnitude both contribute to mathematical competence in children. *Developmental Science*, *20*(4), e12418. DOI: 10.1111/desc.12418.

Lv, J., Mao, H., Zeng, L., Wang, X., Zhou, X., & Mou, Y. (2023). The developmental relationship between nonsymbolic and symbolic fraction abilities. *Journal of experimental child psychology*, *232*, 105666. DOI: 10.1016/j.jecp.2023.105666.

Lyons, I. M., & Beilock, S. L. (2011). Numerical ordering ability mediates the relation between number-sense and arithmetic competence. *Cognition*, *121*(2), 256-261. DOI: 10.1016/j.cognition.2011.07.009.

Lyons, I. M., Price, G. R., Vaessen, A., Blomert, L., & Ansari, D. (2014). Numerical predictors of arithmetic success in grades 1-6. *Developmental science, 17*(5), 714-726. DOI: 10.1111/desc.12152.

Lyons, I. M., & Ansari, D. (2015). Foundations of children's numerical and mathematical skills: The roles of symbolic and nonsymbolic representations of numerical magnitude. *Advances in child development and behavior, 48*, 93-116. DOI: 10.1016/bs.acdb.2014.11.003.

Lyons, I. M., Nuerk, H. C., & Ansari, D. (2015). Rethinking the implications of numerical ratio effects for understanding the development of representational precision and numerical processing across formats. *Journal of Experimental Psychology: General*, *144*(5), 1021. DOI: 10.1037/xge0000094.

Mandler, G., & Shebo, B. J. (1982). Subitizing: an analysis of its component processes. *Journal of experimental psychology: general*, *111*(1), 1. DOI: 10.1037/0096-3445.111.1.1.

Marinelli, C. V., Martelli, M., & Zoccolotti, P. (2024). Does the procedural deficit hypothesis of dyslexia account for the lack of automatization and the comorbidity among developmental disorders? *Cognitive Neuropsychology, 41*(3-4), 93-112. DOI: 10.1080/02643294.2024.2393447.

Marinelli, C. V., Angelelli, P., Martelli, M., Trenta, M., & Zoccolotti, P. (2021). Ability to Consolidate Instances as a Proxy for the Association Among Reading, Spelling, and Math Learning Skill. *Frontiers in Psychology*, *12*, 761696. DOI: 10.3389/fpsyg.2021.761696.

Romano, C., Bruno, F., Milano, S., Nardacchione, G., & Marinelli, C.V. (in press). Il metodo analogico di Bortolato per gli studenti con disturbi specifico di apprendimento (pp. 173-187). In G.A. Toto (a cura di). *Un bootcamp per le competenze in Università*. Trento: Edizioni Centro Studi Erickson S.p.A.

Matejko, A. A., & Ansari, D. (2016). Trajectories of symbolic and nonsymbolic magnitude processing in the first year of formal schooling. *PloS one*, *11*(3), e0149863. DOI: 10.1371/journal.pone.0149863.

Mazzocco, M. M. M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011a). Preschoolers' precision of the approximate number system predicts later school mathematics performance. *PLoS One*, *6*(9). DOI: 10.1371/journal.pone.0023749.

Mazzocco, M. M. M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011b). Impaired acuity of the approximate number system underlies mathematical learning disability (dyscalculia). *Child Development*, *82*, 1224-1237. DOI: 10.1111/j.1467-8624.2011.01608.x.

Mejias, S., Mussolin, C., Rousselle, L., Grégoire, J., & Noël, M. P. (2012). Numerical and nonnumerical estimation in children with and without mathematical learning disabilities. *Child Neuropsychology*, *18*(6), 550-575. DOI: 10.1080/09297049.2011.625355.

Merkley, R., & Ansari, D. (2016). Why numerical symbols count in the development of mathematical skills: Evidence from brain and behavior. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, *10*, 14-20. DOI: 10.1016/j.cobeha.2016.04.006.

Mou, Y., Li, Y., Hoard, M. K., Nugent, L. D., Chu, F. W., Rouder, J. N., & Geary, D. (2016). Developmental foundations of children's fraction magnitude knowledge. *Cognitive Development*, *39*, 141-153. DOI: 10.1016/j.cogdev.2016.05.002.

Mundy, E., & Gilmore, C. K. (2009). Children's mapping between symbolic and nonsymbolic representations of number. *Journal of experimental child psychology*, *103*(4), 490-502. DOI: 10.1016/j.jecp.2009.02.003.

Mussolin, C., Mejias, S., & Noël, M. P. (2010). Symbolic and nonsymbolic number comparison in children with and without dyscalculia. *Cognition*, *115*(1), 10-25. DOI: 10.1016/j.cognition.2009.10.006.

Mussolin, C., De Volder, A., Grandin, C., Schlogel, X., Nassogne, M., & Noël, M. (2010). Neural correlates of symbolic number comparison in developmental dyscalculia. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *22*(5), 860-874. DOI: 10.1162/jocn.2009.21237.

Nieder, A., & Dehaene, S. (2009). Representation of number in the brain. *Annual review of neuroscience*, *32*, 185-208. DOI: 10.1146/annurev.neuro.051508.135550.

Nosworthy, N., Bugden, S., Archibald, L., Evans, B., & Ansari, D. (2013). A two-minute paper-and-pencil test of symbolic and nonsymbolic numerical magnitude processing explains variability in primary school children's arithmetic

competence. *PloS one*, *8*(7), e67918. DOI: 10.1371/journal.pone.0067918.
Nunez, R. E. (2017). Is there really an evolved capacity for number?. *Trends in Cognitive Sciences, 21*(6), 409-424. DOI: 10.1016/j.tics.2017.03.005.
Obersteiner, A., Reiss, K., & Ufer, S. (2013). How training on exact or approximate mental representations of number can enhance first-grade students' basic number processing and arithmetic skills. *Learning and Instruction*, *23*, 125-135. DOI: 10.1016/j.learninstruc.2012.08.004.
Osmond, J. (1993). *The Reality of Dyslexia.* London: Cassell.
Park, J., & Brannon, E. M. (2013). Training the approximate number system improves math proficiency. *Psychological science*, *24*(10), 2013-2019. DOI: 10.1177/0956797613482944.
Park, J., & Brannon, E. M. (2014). Improving arithmetic performance with number sense training: An investigation of underlying mechanism. *Cognition, 133*(1), 188-200. DOI: 10.1016/j.cognition.2014.06.011.
Parsons, S., & Bynner, J. (2005). Measuring basic skills for longitudinal study: the design and development of instruments for use with cohort members in the age 34 follow-up in the 1970 British cohort study (BCS70). *Literacy and Numeracy Studies*, *14*(2), 7-30.
Piazza, M., Pinel, P., Le Bihan, D., Dehaene, S. (2007). A magnitude code common to numerosities and number symbols in human intraparietal cortex. *Neuron 53*(2), 293-305. DOI: 10.1016/j.neuron.2006.11.022.
Piazza, M. (2010). Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations. *Trends in Cognitive Sciences, 14*, 542-551. DOI: 10.1016/b978-0-12-385948-8.00017-7.
Price, G. R., Holloway, I., Räsänen, P., Vesterinen, M., & Ansari, D. (2007). Impaired parietal magnitude processing in developmental dyscalculia. *Current Biology*, *17*(24), 1042-1043. DOI: 10.1016/j.cub.2007.10.013.
Price, G. R., & Fuchs, L. S. (2016). The mediating relation between symbolic and nonsymbolic foundations of math competence. *PLoS One*, *11*(2), e0148981. DOI: 10.1371/journal.pone.0148981.
Ramani, G. B., & Siegler, R. S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child development*, *79*(2), 375-394. DOI: 10.1111/j.1467-8624.2007.01131.x.
Ramani, G. B., & Siegler, R. S. (2011). Reducing the gap in numerical knowledge between low- and middle-income preschoolers. *Journal of Applied Developmental Psychology, 32,* 146-159. DOI: 10.1016/j.appdev.2011.02.005.
Ramani, G. B., Siegler, R. S., & Hitti, A. (2012). Taking it to the classroom: Number board games as a small group learning activity. *Journal of educational psychology*, *104*(3), 661. DOI: 10.1037/a0028995.
Räsänen, P., Salminen, J., Wilson, A. J., Aunio, P., & Dehaene, S. (2009). Computer-assisted intervention for children with low numeracy skills. *Cognitive development*, *24*(4), 450-472. DOI: 10.1016/j.cogdev.2009.09.003.

Reeve, R., Reynolds, F., Humberstone, J., & Butterworth, B. (2012). Stability and change in markers of core numerical competencies. *Journal of Experimental Psychology: General*, *141*(4), 649. DOI: 10.1037/a0027520.
Reeve RA, Paul JM, Butterworth B. 2015. Longitudinal changes in young children's 0-100 to 0-1000 numberline error signatures. *Frontiers in Psychology, 6*(647). DOI: 10.3389/fpsyg.2015.00647.
Reigosa-Crespo, V., González-Alemañy, E., León, T., Torres, R., Mosquera, R., & Valdés-Sosa, M. (2013). Numerical capacities as domain-specific predictors beyond early mathematics learning: A longitudinal study. *PloS One*, *8*(11), e79711. DOI: 10.1371/journal.pone.0079711.
Rickard, T., Romero, S., Basso, G., Wharton, C., Flitman, S., & Grafman, J. (2000). The calculating brain: an fmri study. *Neuropsychologia, 38*(3), 325-335. DOI: 10.1016/s0028-3932(99)00068-8.
Ritchie, S. J., & Bates, T. C. (2013). Enduring links from childhood mathematics and reading achievement to adult socioeconomic status. *Psychological science*, *24*(7), 1301-1308. DOI: 10.1177/0956797612466268.
Robinson, C. S., Menchetti, B. M., & Torgesen, J. K. (2002). Toward a two-factor theory of one type of mathematics disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, *17*(2), 81-89. DOI: 10.1111/1540-5826.00035.
Rose, S. A., Feldman, J. F., & Jankowski, J. J. (2001). Attention and recognition memory in the 1st year of life: a longitudinal study of preterm and full-term infants. *Developmental psychology*, *37*(1), 135. DOI: 10.1037/0012-1649.37.1.135.
Ross-sheehy, S., Oakes, L. M., & Luck, S. J. (2003). The development of visual short-term memory capacity in infants. *Child development, 74*(6), 1807-1822. DOI: 10.1046/j.1467-8624.2003.00639.x.
Rousselle, L., & Noël, M. P. (2007). Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: A comparison of symbolic vs non-symbolic number magnitude processing. *Cognition*, *102*(3), 361-395. DOI: 10.1016/j.cognition.2006.01.005.
Rubinsten, O., & Tannock, R. (2010). Mathematics anxiety in children with developmental dyscalculia. *Behavioral and Brain functions*, *6*, 1-13. DOI: 10.1186/1744-9081-6-46.
Sasanguie, D., De Smedt, B., Defever, E., & Reynvoet, B. (2012). Association between basic numerical abilities and mathematics achievement. *British Journal of Developmental Psychology*, *30*(2), 344-357. DOI: 10.1046/j.1467-8624.2003.00639.x.
Sasanguie, D., Van den Bussche, E., & Reynvoet, B. (2012). Predictors for mathematics achievement? Evidence from a longitudinal study. *Mind, Brain, and Education*, *6*(3), 119-128. DOI: 10.1111/j.1751-228x.2012.01147.x.
Sasanguie, D., Defever, E., Maertens, B., & Reynvoet, B. (2014). The approximate number system is not predictive for symbolic number processing in kindergarteners. *Quarterly journal of experimental psychology*, *67*(2), 271-280. DOI: 10.1080/17470218.2013.803581.

Schleifer, P., & Landerl, K. (2011), Subitizing and counting in typical and atypical development. *Developmental Science*, *14*(2), 280-291. DOI: 10.1111/j.1467-7687.2010.00976.x.

Schneider, M., Beeres, K., Coban, L., Merz, S., Susan Schmidt, S., Stricker, J., & De Smedt, B. (2017). Associations of non-symbolic and symbolic numerical magnitude processing with mathematical competence: A meta-analysis. *Developmental Science*, *20*(3). DOI: 10.1111/desc.12372.

Shrager, J., & Siegler, R. S. (1998). SCADS: A model of children's strategy choices and strategy discoveries. *Psychological science*, *9*(5), 405-410. DOI: 10.1111/1467-9280.00076.

Siegler, R. S. (1996). *Emerging minds: The process of change in children's thinking*. New York: Oxford University Press.

Siegler, R. S., & Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological science*, *14*(3), 237-250. DOI: 10.1111/1467-9280.02438.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child development*, *75*(2), 428-444. DOI: 10.1111/j.1467-8624.2004.00684.x.

Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2008). Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development. *Developmental science*, *11*(5), 655-661. DOI: 10.1111/j.1467-7687.2008.00714.x.

Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2009). Playing linear number board games–but not circular ones – improves low-income preschoolers' numerical understanding. *Journal of educational psychology*, *101*(3), 545. DOI: 10.1037/a0014239.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2014). An integrative theory of numerical development. *Child Development Perspectives*, *8*(3), 144-150. DOI: 10.1111/cdep.12077.

Sekuler, R., & Mierkiewicz, D. (1977). Children's judgments of numerical inequality. *Child Development*, *48*(2), 630-633. DOI: 10.2307/1128664.

Starr, A., Libertus, M. E., & Brannon, E. M. (2013). Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *110*(45), 18116-18120. DOI: 10.1073/pnas.1302751110.

Strauss, M. S., & Curtis, L. E. (1981). Infant perception of numerosity. *Child development*, *52*(4), 1146-1152. DOI: 10.2307/1129500.

Thompson, C. A., & Opfer, J. E. (2010). How 15 hundred is like 15 cherries: Effect of progressive alignment on representational changes in numerical cognition. *Child Development*, *81*(6), 1768-1786. DOI: 10.1111/j.1467-8624.2010.01509.x.

Toll, S. W., & Van Luit, J. E. (2014). Accelerating the early numeracy development of kindergartners with limited working memory skills through remedial education. *Research in developmental disabilities*, *34*(2), 745-55. DOI: 10.1016/j.ridd.2012.09.003.

Toll, S. W., & Van Luit, J. E. (2014). Explaining numeracy development in weak performing kindergartners. *Journal of Experimental Child Psychology*, *124*, 97-111. DOI: 10.1016/j.jecp.2014.02.001.

Van Marle, K., Chu, F. W., Li, Y., & Geary, D. C. (2014). Acuity of the approximate number system and preschoolers' quantitative development. *Developmental science*, *17*(4), 492-505. DOI: 10.1016/j.jecp.2014.02.001.
Vanbinst, K., Ghesquiere, P., & De Smedt, B. (2012). Numerical magnitude representations and individual differences in children's arithmetic strategy use. *Mind, Brain, and Education*, *6*(3), 129-136. DOI: 10.1111/j.1751-228x.2012.01148.x.
Vanbinst, K., Ghesquière, P., & De Smedt, B. (2014). Arithmetic strategy development and its domain-specific and domain-general cognitive correlates: A longitudinal study in children with persistent mathematical learning difficulties. *Research in developmental disabilities*, *35*(11), 3001-3013. DOI: 10.1016/j.ridd.2014.06.023.
Vanbinst, K., Ghesquière, P., & De Smedt, B. (2015). Does numerical processing uniquely predict first graders' future development of single-digit arithmetic?. *Learning and Individual Differences*, *37*, 153-160. DOI: 10.1016/j.lindif.2014.12.004.
Vanbinst, K., Ceulemans, E., Peters, L., Ghesquière, P., & De Smedt, B. (2018). Developmental trajectories of children's symbolic numerical magnitude processing skills and associated cognitive competencies. *Journal of experimental child psychology*, *166*, 232-250. DOI: 10.1016/j.jecp.2017.08.008.
Verguts, T., & Fias, W. (2004). Representation of number in animals and humans: A neural model. *Journal of cognitive neuroscience*, *16*(9), 1493-1504. DOI: 10.1162/0898929042568497.
Vigna, G., Ghidoni, E., Burgio, F., Danesin, L., Angelini, D., Benavides-Varela, S., & Semenza, C. (2022). Dyscalculia in early adulthood: Implications for numerical activities of daily living. *Brain Sciences*, *12*(3), 373. DOI: 10.3390/brainsci12030373.
Vintere, A. (2021). A study on learning difficulties related to dyscalculia and mathematical anxiety. *Research for Rural Development*, *36*, 330-336. DOI: 10.22616/rrd.27.2021.047.
Vilette, B., Mawart, C., & Rusinek, S. (2010). L'outil «estimateur», la ligne numérique mentale et les habiletés arithmétiques. *Pratiques psychologiques*, *16*(2), 203-214. DOI: 10.1016/j.prps.2009.10.002.
Wilson, A. J., Revkin, S. K., Cohen, D., Cohen, L., & Dehaene, S. (2006). An open trial assessment of "The Number Race", an adaptive computer game for remediation of dyscalculia. *Behavioral and brain functions*, *2*, 1-16. DOI: 10.1186/1744-9081-2-20.
Wilson, A. J., & Dehaene, S. (2007). Number sense and developmental dyscalculia. *Human behavior, learning, and the developing brain: Atypical development*, *2*, 212-237.
Wilson, A. J., Dehaene, S., Dubois, O., & Fayol, M. (2009). Effects of an adaptive game intervention on accessing number sense in low-socioeconomic-status kindergarten children. *Mind, Brain, and Education*, *3*(4), 224-234. DOI: 10.1111/j.1751-228x.2009.01075.x.

Wilkey, E. and Price, G. (2018). Attention to number: the convergence of numerical magnitude processing, attention, and mathematics in the inferior frontal gyrus. *Human Brain Mapping*, *40*(3), 928-943. DOI: 10.1002/hbm.24422.

Xenidou-Dervou, I., Molenaar, D., Ansari, D., van der Schoot, M., & van Lieshout, E. C. (2017). Nonsymbolic and symbolic magnitude comparison skills as longitudinal predictors of mathematical achievement. *Learning and Instruction*, *50*, 1-13. DOI: 10.1016/j.learninstruc.2016.11.001.

Xu, F., & Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, *74*(1), 1-11. DOI: 10.1016/s0010-0277(99)00066-9.

Xu, F., Spelke, E. S., & Goddard, S. (2005). Number sense in human infants. *Developmental science*, *8*(1), 88-101. DOI: 10.1111/j.1467-7687.2005.00395.x.

Zoccolotti, P., De Luca, M., Marinelli, C. V., & Spinelli, D. (2020a). Predicting individual differences in reading, spelling and maths in a sample of typically developing children: A study in the perspective of comorbidity. *PloS one*, *15*(4), e0231937. DOI: 10.1371/journal.pone.0231937.

Zoccolotti P, De Luca M, Marinelli CV, & Spinelli D (2020b). Testing the specificity of predictors of reading, spelling and maths: a new model of the association among learning skills based on competence, performance and acquisition. *Frontiers in Human Neuroscience*, *14*, 573998. DOI: 10.3389/fnhum.2020.573998.

Zoccolotti P., De Luca M., & Marinelli C.V. (2021a). Interpreting developmental surface dyslexia within a comorbidity perspective. *Brain Sciences*, *11*(12), 1568. DOI: 10.3390/brainsci11121568.

Zoccolotti P., Angelelli P., Marinelli C.V., & Romano D.L. (2021b). A network analysis of the relationship among reading, spelling, and math skills. *Brain Sciences, 11*, 656. DOI: 10.3390/brainsci11050656.